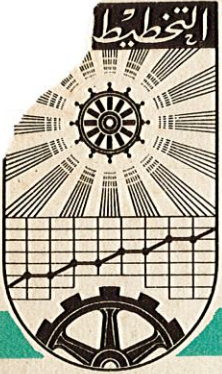


الجمهورية العربية المتحدة



مَعْدَدُ التَّخْطِيطِ الْقَوْمِيّ

مذكرة رقم " ١٨٨ "

محاضرات في الاقتصاد الرياضي

~~~~~

الدكتور محمد محمود الامام

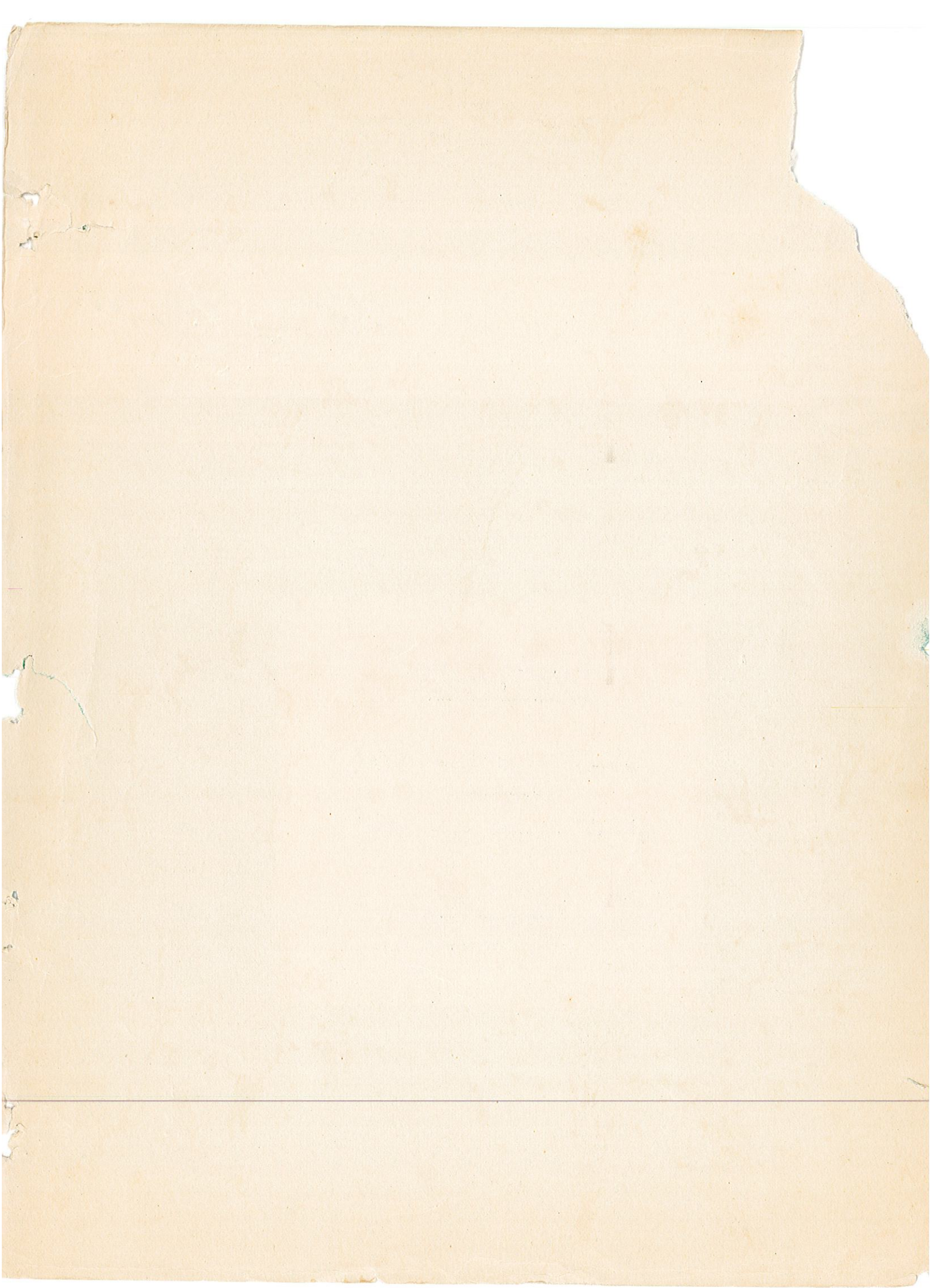
( الجزء الأول )

٧ يونيه ١٩٦٢

القاهرة

٣ شارع محمد مصطفى بالزمالك







## الفصل الأول

### مقدمة رياضية

#### ١- الأعداد المركبة

##### ١/١- الأعداد والعمليات الرياضية :

إذا بدأنا بأبسط أنواع الأعداد وجدنا أنه الأعداد الصحيحة ( الكاملة ) integers التي تبني على الأعداد الطبيعية ( ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٠ ) ومن الممكن تطبيق عمليات الجمع عليها ويكون الناتج أيضا أعدادا صحيحة وكما أنه من الممكن تعميم هذه القاعدة إلى الضرب ، ثم تعميم الضرب إلى عملية الرفع إلى أس صحيح موجب .

غير أن عملية القسمة لا تؤدي دائما إلى أعداد صحيحة وهنا يجب أن يضاف إلى مجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة أخرى هي الكسور fractions وتتكون من المجموعتين معا ما يعرف بالأعداد القياسية rational numbers . وعلى ذلك نستطيع إجراء عمليات الجمع والضرب والرفع إلى أس صحيح والقسمة على هذه المجموعة دون أن نصادف حالات شاذة .

فإذا انتقلنا إلى عملية إيجاد الجذور ( عكس الأس ) نصادف صعوبة مماثلة لتلك التي ظهرت عند القسمة ( عكس الضرب ) إذ أن الجذر النوني لأي عدد قياسي لا يلزم أن يكون عددا قياسيا أي لا يلزم أن يكون في شكل خارج قسمة عدد قياسي على عدد قياسي آخر ( باعتبار الواحد الصحيح عدد قياسي ) . ولذلك

نحتاج إلى إضافة مجموعة جديدة هي مجموعة الأعداد غير القياسية irrational numbers للتعبير عن هذه المقادير . ولكن لا يجب أن يعنى هذا أن يكون أي عدد منتبها إلى إحدى المجموعتين ، إذ من الجائز أن يشتمل العدد الواحد



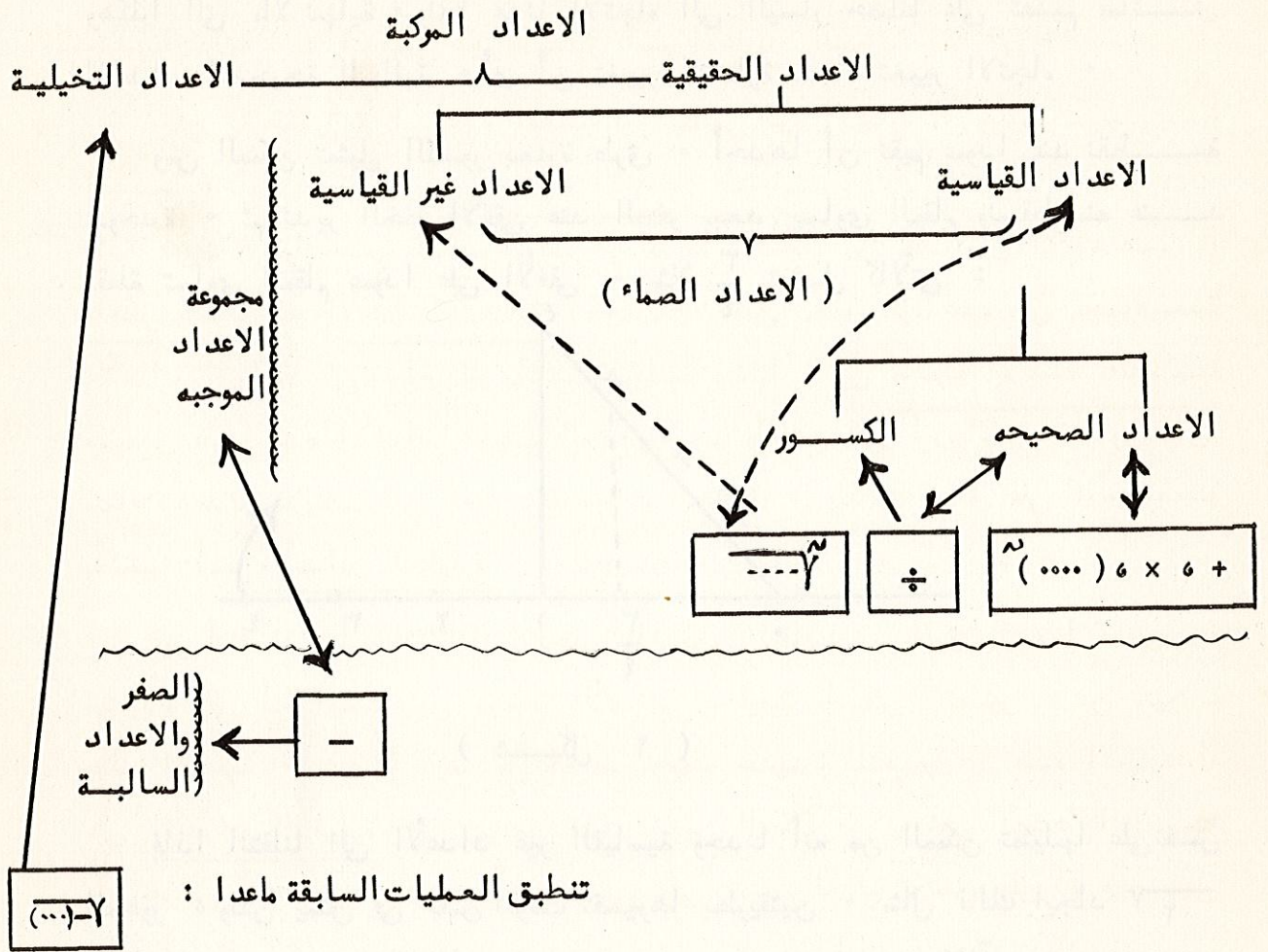
على جزئين أحدهما قياسى والآخر غير قياسى ويعبر عن ذلك بكتابة الجزئيين  
وبينهما علامة ( + ) وهذا هو ما يطلق أسم الأعداد الصماء Surds

ولكن يلاحظ أن كل هذه العمليات لاتظهر فكرة الاشارة ، ويمكن تسمية  
المجموعات السابقة كلها بأسم مجموعة الأعداد الموجبة positive number system  
فاذا أردنا اجراء عملية الطرح وجب أن ندخل اصطلاحين جديدين الأول هو  
الصفر والثانى هو الأعداد السالبة . وبذلك نحصل مقابل كل عدد فى مجموعة  
الأعداد السابقة على نظير له باشارة سالبة ومنها تتكون مجموعة الأعداد السالبة  
وتنطبق على هذه الأعداد عمليات الجمع والضرب والرفع الى أس والقسمة دون أن  
نصادف عددا لاينضم الى أحد المجموعات السابقة ، ولذلك نطلق على المجموعة  
بأكملها أسم الأعداد الحقيقية Real numbers

غير أننا اذا أردنا ايجاد الجذر التربيعى لمقادير سالبة صادفتنا صعوبة  
جديدة هى أنه ليست بين مجموعة الأعداد الحقيقية ما يمكن التعبير به عن نتيجة  
هذه العملية . لذلك لابد من اضافة مجموعة جديدة للتعبير عن هذه الأعداد  
هى الأعداد التخيلية imaginary ، ومن الممكن أن يحتوى العدد الواحد  
على جزئين أحدهما حقيقى والآخر تخيلى وفى هذه الحالة نحصل على ما يسمى  
بالأعداد المركبة complex numbers . وبذلك يصبح فى مقدورنا  
أن نجرى جميع العمليات الرياضية الأساسية دون أن نصادف حالة خارجة عن  
المجموعتين السابقتين . وعلى ذلك يمكن اعتبار جميع الأعداد أعدادا مركبة ، فاذا  
كان الجزء التخيلى منها = صفر فان العدد يكون حقيقيا ، واذا كان الجزء  
الحقيقى = صفر كان العدد تخيليا .

ويمكن تلخيص هذه المجموعات كالآتى :





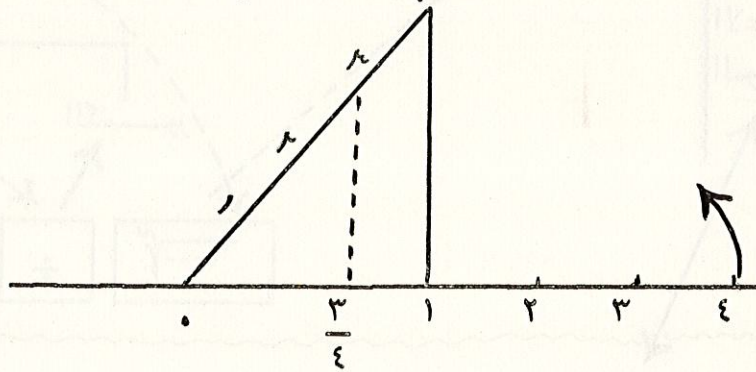
( شكل ١ ) مجموعات الاعداد

## ٢/١- التمثيل البياني للاعداد الحقيقية :

يقابل التمثيل الرمزي للاعداد المختلفة والعمليات التي تجري عليها ، تمثيل بياني . وهذا يستدعي ادخال فكرة الأبعاد dimensions ونبدأ بخط مستقيم في المستوى نأخذ نقطة عليه تمثل الصفير ثم مسافة الى يمين الصفير نعتبرها الوحدة وباستخدام أدوات القياس المعروفة نقسم الخط الى مسافات متساوية وكل منها تساوى الوحدة ، فنحصل على متسلسلة تبدأ بالصفير ثم ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... .



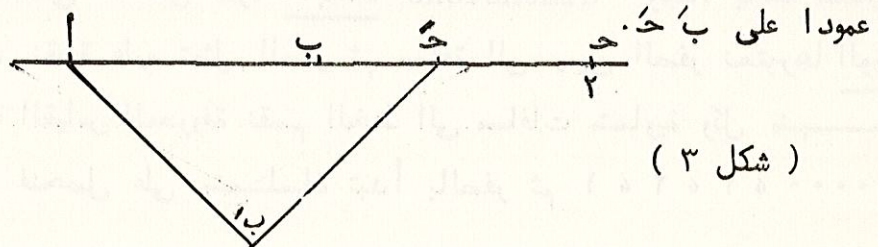
وهكذا الى ما لانهاية ° واذا غيرنا الاتجاه الى اليسار حصلنا على تقسيم مماثل  
للاعداد الصحيحة السالبة ° أى أن تغيير الإشارة معناه تغيير الاتجاه °  
ومن الممكن تمثيل الكسور بعدة طرق ° أحدها أن نقيم عمودا عند نقطة  
الوحدة ° ثم ندير الخط الأفقى عند الصفر ببعد يساوى المقام ونسقط منه عند  
نقطة تساوى المقام عمودا على الأفقى ° مثلا  $\frac{3}{4}$  تمثل كالآتى :



( شكل ٢ )

فاذا انتقلنا الى الأعداد غير القياسية وجدنا أنه من الممكن تمثيلها على نفس  
المحور ° ولكن يمكن فى نفس الوقت تفسيرها بطريقتين ° مثال ذلك ايجاد  $\frac{1}{2}$   
فعلاقة الجذر معناها اجراء عملية معينة ° وهذه العملية تتم كالآتى :

اذا سمينا نقطة الصفر " ١ " والوحدة " ٢ " ونقطة " ٢ " حـ " فاننا نستطيع  
أن نتصور أن الخط انكسر عند النقطة ب التى أخذت الوضع بـ بحيث ظلت ا  
ثابتة وتحركت ح يسارا على المحور الافقى بحيث تأخذ الوضع حـ ° حيث يكون ابـ



( شكل ٣ )



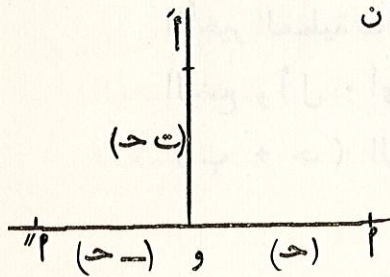
وبذلك يكون أ ح هو الجذر المطلوب . وعلى ذلك يمكن تفسير العملية  
بأحدى طريقتين :

١- الأولى هي انكسار أ ب ح ليأخذ الوضع أ ب ح . أى أنه يحتفظ بطوله  
الكل مع تغيير الاتجاه بصورة منكسرة .

٢- الثانية هي تحرك ح لى تقع على ح . أى أن أ ح يتغير طوله ولكن  
لا يزال محتفظا باتجاهه .

### ٣/١- الاعداد التخيلية والمركبة :

لنفرض الآن أن لدينا مستوى أى سطحنا ذا بعدين . ولنفرض أننا أخذنا على  
المحور الأفقى البعد الموجب و أ وليكن طوله هو ح . فإذا تحرك هذا البعد فى  
اتجاه عمودى على المحور الأفقى أخذ الوضع و أ على المحور الرأسى لأعلى ، ولو  
أنه يظل محتفظا بطوله ولنرمز لهذه العملية operation بالرمز ت ح (تحويل) \*  
ثم لنكرر هذه العملية مرة أخرى ، فنجد أن البعد و أ يأخذ الوضع و أ أى أنه  
يأخذ الاتجاه العكس لاتجاهه الأسمى ، فإذا اعتبرنا أن  
تكرار العملية ت مرتين معناه ضربها فى نفسها أى ت<sup>٢</sup>



(شكل ٤)

$$٠ \cdot ت (ت ح) = ت^٢ ح = - ح$$

\* ويسمى الرمز ت باسم "محول" operator وواضح من اللفظة الانجليزية أنه  
"أداة اجراء عملية" ، ونحن نقترح الترجمة السابقة نظرا لأن أى عملية يقصد  
بها أساسا تحويل متغير من صورة لأخرى .



فاذا عاملنا العامل  $t^2$  على أنه عدد فان

$$t^2 = 1 \quad \text{و} \quad t = \frac{1}{t} \quad (1)$$

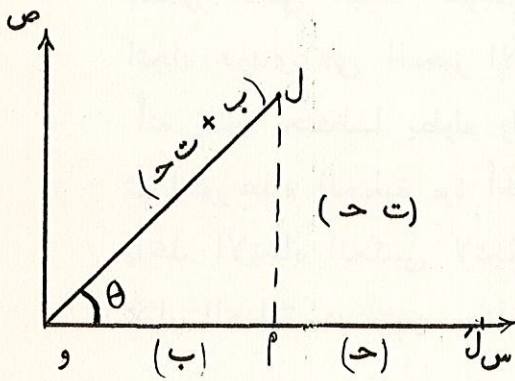
ومعنى هذا أنه اذا كانت الأعداد الحقيقية تمثل على المحور الأفقى ، فان المحور الرأسى يمثل الأعداد التخيلية كما ينظر اليها من المحور الأفقى .

وحسب التعريفات السابقة فان الاعداد المركبة يرمز اليها بالرمز

$$b + ct$$

ويمكن تمثيل هذه الأعداد بيانيا بعدة طرق :

أ - باستخدام المحاور الكرتيزية المتعامدة :



نرسم المحورين المتعامدين 'ص' و 'ت' .  
ونأخذ على المحور الأفقى البعد 'ب' وطوله 'ب' .  
ثم البعد 'ت' وطوله 'ت' . فاذا أدخلنا على  
الأيخيرة العملية 'ت' فان الخط 'و-ل' يأخذ  
الوضع 'و-ل' . أى أن العدد يتحول من  
(ب + ت) الى (ب + ت) .

( شكل ٥ ) رسم أرجاند للعدد المركب

وكما مثلنا العدد الحقيقى بالطول 'و-ل' أو النقطة 'ل' فى الاتجاه 'و-ل' ،  
فاننا نعتبر أن العدد المركب قد مثل بالنقطة 'ل' أو بالبعد 'و-ل' فى الاتجاه  
'و-ل' أو مايسمى الموجه vector 'و-ل' . ويسمى هذا التمثيل البيانى برسم  
أرجاند Argand diagram

تعريف : العدد المركب 'ع' هو زوج من الأعداد الحقيقية (ب ، ت) مأخوذة

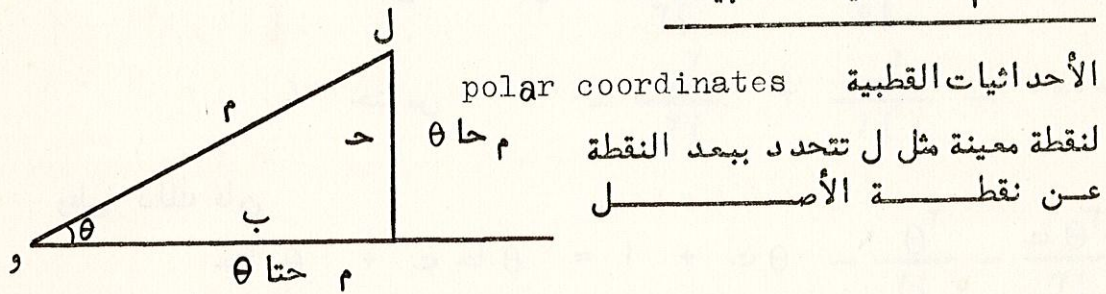


بهذا الترتيب ، ويتمثل في المستوى وس ص بالموجه ول حيث ل هي النقطة التي أحداثياها ( ب ، ح ) .

ونلاحظ أن العدد المركب هو زوج من الأعداد الحقيقية وليس الأعداد الحقيقية ذاتها . وكما هو معلوم ، فان طول الموجه ول هو  $\sqrt{b^2 + c^2}$  ، وهذا عدد حقيقي ويسمى بالقيمة المطلقة للعدد المركب أي  $|ع|$  ، ونظرا لأن هذا العدد يتحدد باتجاهه وطوله فاننا نعين زاوية الاتجاه argument ولتكن الزاوية  $\theta$  . وتتحدد بدلالة ب ، ح كالآتي :  $\theta = \arctan \frac{ب}{ح}$  وعلى هذا نلخص نتائجنا في الآتي :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{العدد المركب } ع = ب + ت ح \text{ يتمثل بالموجه ول} \\ \text{قيمه المطلقه } |ع| = \sqrt{ب^2 + ح^2} = م \text{ مثلا ( عدد حقيقي )} \\ \text{وزاوية اتجاهه اتجاه (ع) } = \theta = \arctan \frac{ب}{ح} \text{ مثلا} \end{array} \right.$$

ب - باستخدام الأحداثيات القطبية :



( شكل ٦ )

واتجاهها أي الزاوية التي تصنعها مع الأفقى وس . أي بالبعد م والزاوية  $\theta$  وواضح أن الجزء الحقيقي من العدد أي ب يساوى م حتا  $\theta$  ، بينما الجزء التخيلي هو ت ح = م حتا  $\theta$  . اذن يمكن كتابة العدد كالآتي :

$$(3) \quad ع = م ( \cos \theta + ت ح \sin \theta )$$



وتكون قيمته المطلقة هي  $|ع| = \sqrt{\text{حتا}^2 \theta + \text{حا}^2 \theta}$  كما سبق

بينما زاوية اتجاهه  $\theta$

تمثيل العدد المركب بالدالة الأسية :

من المعلوم وفقا لنظرية مكلورين أنه يمكن تمثيل الدالة المتصلة  $د(س)$  كالاتى :

$د(س) = د(٠) + س د'(٠) + \frac{س^2}{٢!} د''(٠) + \frac{س^3}{٣!} د'''(٠) + \dots$   
حيث  $د^{(ن)}$  هو التفاضل النوني للدالة  $د$  بالنسبة الى  $س$  ، وجميع التفاضلات محسوبة عند  $س = ٠$  وكما هو معلوم فان

$$\frac{س}{س} = \text{حتا} س ، \frac{س^2}{س} = \text{حا} س$$

اذن بحساب التفاضلات المتتالية ثم وضع  $س$  فيها = صفر فان

$$\text{حاس} = س - \frac{س^3}{٣!} + \frac{س^5}{٥!} - \dots$$

$$١ - \text{حتا} س = ١ - \frac{س^2}{٢!} + \frac{س^4}{٤!} - \dots$$

وعلى ذلك فان

$$\text{حتا} \theta + \theta \text{ت} = ١ + \theta \text{ت} - \frac{\theta^2 \text{ت}^2}{٢!} + \frac{\theta^3 \text{ت}^3}{٣!} - \dots$$

$$١ = ١ + \theta \text{ت} + \frac{\theta^2 (\text{ت}^2)}{٢!} + \frac{\theta^3 (\text{ت}^3)}{٣!} + \dots$$

$$\therefore \text{حتا} \theta + \theta \text{ت} = \theta \text{هت} \quad (٤)$$



بالمثل يمكن اثبات أن

( 3 ' )

$$(o) \quad \theta \sim \text{ح} + \theta \sim \text{ح} = \theta \sim \text{ح} = \hat{\theta}(\theta \sim \text{ح}) = \hat{\theta}(\theta \sim \text{ح} + \theta \sim \text{ح})$$

$$(o) \quad \theta \sim \text{ح} + \theta \sim \text{ح} = \theta \sim \text{ح} = \hat{\theta}(\theta \sim \text{ح}) = \hat{\theta}(\theta \sim \text{ح} + \theta \sim \text{ح})$$

( ' 0 )

De Moivre

وعلى هذا فإن العدد المركب يمكن تمثيله بدلالة الدالة الأسية :

( ٦ )

والنظرية السابقة تعطينا نتيجة هامة بالنسبة لرفع هذه الأعداد إلى أس ٨.

١ / ٤ - القواعد الجبرية للاعداد المركبة :

القواعد الجبرية هي مجموعة العمليات التي تعالج بها مجموعة معينة من الأعداد . وهذه القواعد هي أساسا اصطلاحية ، ولما كانت القواعد الجبرية الخاصة بالأعداد الحقيقية شائعة الاستخدام فمن المفيد أن نستخدمها للتعبير عن العمليات المناظرة بالنسبة للأعداد المركبة . وسنرمز الى العدد المركب  $E(261000000)$  بالرمز  $(س + ت ص)$  وبناءً على ذلك نعرف القواعد الجبرية كالآتي :

١- تعريف الصفر : وفقاً لتعريف العدد ع بأنه النقطة ( س ، ص ) ، فإن ع = صفر  
معناه النقطة التى أحداثياها هما س = صفر ، ص = صفر ، ويؤول الموجّه  
ول الى نقطة الأصل فى المستوى . فالصفر ، كأي عدد مركب ، يتكون من عنصرين  
ولا يجب اعتباره كعدد حقيقى عادى .

۲- التساوی : اذا كان  $١ = (س + ت ص) يساوي ٢ = (س + ت ص)$

فان س س ص ص



أى أن الجزء الحقيقى يساوى الحقيقى بينما التخيلى يساوى التخيلى .

٣- الجمع : اذا عرفنا المجموع  $ع_١ + ع_٢$  بأنه العدد  $ع = س + ت + ص$  فان :

$$ع = (س_١ + ت_١ + ص_١) + (س_٢ + ت_٢ + ص_٢) = (س_١ + س_٢) + (ت_١ + ت_٢) + (ص_١ + ص_٢) \quad (٧)$$

ومن قاعدة التساوى يتضح أن الجزء الحقيقى

فى المجموع هو مجموع الجزئين الحقيقيين

$س = س_١ + س_٢$  ، بينما الجزء التخيلى

يساوى مجموع الجزئين التخيليين :

$ص = ص_١ + ص_٢$  . أى أن المجموع هو

الآخر عدد مركب . ومن الممكن تمثيل عملية

الجمع بيانياً ، بتكملة متوازي الأضلاع الذى

ضلعاه  $ع_١$  ،  $ع_٢$  فيكون المجموع هو الموجه الذى

يمثل قطر متوازي الأضلاع ول ، وأحداثيا ل هما  $(س_١ + س_٢)$  / فمن الواضح

أن  $و أ = س_١$  بينما  $س = و ب = ا ب$

اذن  $و أ + ا ب = و ب = س_١ + س_٢$  . وبالمثل بالنسبة للأحداثى الرأسى .

٤- الضرب فى عدد حقيقى : يؤدى ضرب العدد  $ع_١$  فى عدد حقيقى  $أ$  الى الحصول

على عدد مركب  $ع = أ ع_١$  ، عنصره هما حاصل ضرب عنصرى العدد الأصلى

فى العدد  $أ$  . أى أن

$$ع = أ ع_١ = (أ س_١ ، أ ص_١) \quad (٨)$$

ومعنى هذا تغيير طول الموجه ول بالنسبة  $أ$  : مع الاحتفاظ باتجاهه .

٥- ضرب الاعداد المركبة : يمكن تعريف عملية الضرب بسهولة باستخدام الصورة الأسية :



$$١٢ = ١٢ هـ ت ١٢ \quad ٢٢ = ٢٢ هـ ت ٢٢$$

$$(٩) \quad (٢٢ + ١٢) هـ ت \times ٢٢ \times ١٢ = ٢٢ \times ١٢ = ٢٢$$

فإذا كتبنا حاصل الضرب  $٢٢ = ٢ هـ ت ٢$  فان  $٢٢ + ١٢ = ٢$  ،  $٢٢ + ١٢ = ٢$  ،  $٢٢ + ١٢ = ٢$  ،  
ولتحويل هذه النتيجة الى الصورة الأصلية نلاحظ أن

$$٢٢ ١٢ = ٢٢ [ (٢٢ + ١٢) حا + (٢٢ + ١٢) حا ]$$

$$٢٢ ١٢ = [ (٢٢ حا ١٢ حا - ٢٢ حا ١٢ حا) + (٢٢ حا ١٢ حا + ٢٢ حا ١٢ حا) ]$$

$$٢٢ ١٢ = [ (٢٢ \times \frac{١}{١٢} + \frac{٢}{٢٢} \times \frac{١}{١٢}) ت + (٢٢ \times \frac{١}{١٢} - \frac{٢}{٢٢} \times \frac{١}{١٢}) حا ]$$

$$(١٠) \quad (٢٢ ١٢ - ٢٢ ١٢) + (٢٢ ١٢ + ٢٢ ١٢) = ٢٢$$

أى أن حاصل الضرب  $٢٢ = ٢٢$  هو العدد المركب

$$\{ (٢٢ ١٢ - ٢٢ ١٢) + (٢٢ ١٢ + ٢٢ ١٢) \}$$

ومن الممكن استخلاص هذه النتيجة بتطبيق طرق الضرب العادية على حاصل الضرب

$$٢٢ ١٢ = (٢٢ + ١٢) \times (٢٢ + ١٢) \quad \text{مع ملاحظة أن } ٢٢ = ٢$$

٦- حالات خاصة : يمكن تعريف الوحدة " ١ " بأخذ موجه على المحور الأفقى يساوى

( ١ ، صفر ) وتكون زاوية اتجاه الموجه  $\theta = \text{صفر}$  . كما يمكن تعريف المحول " ت "

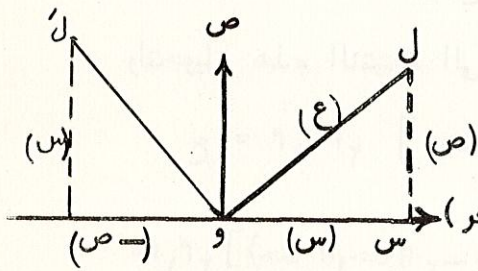
بأنه ( صفر ، ١ ) وواضح من ( ٢ ) أن زاوية اتجاهه  $\theta$  هى  $\frac{\pi}{٢}$  .

أى أن كلا منهما عبرنا عنه بشكل عدد مركب . ومن الواضح أن العدد

$$١ \times ١ = ( ١ ، صفر ) \times ( ١ ، صفر ) = ( ١ ، صفر )$$



أ + ت ح = (أ ، صفر) + (صفر ، ح) = (أ ، ح)  
 أى أن كل عدد مركب (س ، ص) يمكن التعبير عنه بمجموع عددين مركبين  
 الأول هو العدد المركب الوحدة مضروباً في عدد حقيقى س ، والآخر هو  
 العدد المركب ت مضروباً في العدد الحقيقى ص .



ولتمثيل عملية الضرب في الوحدة وفي ت  
 نلاحظ أنه إذا كان لدينا العدد ع يمثله  
 الموجه ول فان حاصل الضرب :

(شكل ٨)

$$\begin{aligned} \text{ع} \times (1, \text{صفر}) &= (س, \text{صفر}) = (س - \text{صفر}, \text{صفر} + \text{صفر}) \\ &= (س, \text{صفر}) = \text{ع} = (س, \text{ص}) = \text{الموجه ول} \end{aligned}$$

ت × ع = (صفر, ١) (س, ص) = (صفر - ص, صفر + س) = (-ص, س) = الموجه ول  
 أى أن الضرب في ت يؤدي الى تحويل الموجه بزاوية قائمة  $\theta = \frac{\pi}{2}$  . فعملية  
 الضرب تنطوي على عملية جمع للزوايا ، فيضاف الى الزاوية  $\theta$  الأصلية الزاوية  
 $\frac{\pi}{2}$  . وكذلك .

$$\begin{aligned} \text{ت}^2 &= (\text{صفر}, 1) \times (\text{صفر}, 1) = (\text{صفر} - 1, \text{صفر} + \text{صفر}) = (-1, 0) \\ \text{ت}^2 &= (-1, 0) = 1 \times (-1) \end{aligned}$$

(١١)

حيث (-1, 0) هو العدد الحقيقى -1 بينما 1 هو الوحدة المركبة وهنا يتم

التحويل مرتين .

ومن الممكن استخلاص هذه النتائج باستخدام الأحداثيات القطبية . فبوضع  
 $\theta = \frac{\pi}{2}$  نجد أن العدد بالصورة الأسية يكون هو  $\text{ع} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$   
 حتا  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  حا  $\frac{\pi}{2}$  ومنها  $\text{ت} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$   $\text{ت} = -\text{ه} = -i$   $\text{ت} = -\text{ه} = -i$  (١٢)  
 . . .  $\text{ت} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$   $\text{ت} = -1$   $\text{ت} = -1$  (١٣)



بالمثل اذا كانت  $\theta = \pm \phi = \mu = 1$  فان

$$(14) \quad \text{هـ ت ط} = \text{هـ - ت ط} = 1$$

وينتج من هذا أن

$$(15) \quad 1 = \text{هـ ت ط} = 2 \left( \frac{\text{ط}}{2} \right) \text{هـ ت} = 2$$

$$(16) \quad \text{وأخيرا فان} \quad \text{ت ع} = \text{هـ ت} \frac{\text{ط}}{2} \cdot \mu \text{هـ ت} \theta = \mu \times \text{هـ ت} \left( \frac{\text{ط}}{2} + \theta \right)$$

أى أن الضرب فى ت بمعنى التحويل بمقدار زاوية قائمة

٧- الطرح : هو العملية العكسية للجمع . وهنا يلزمنا تعريف تغيير الاشارة :

$$(17) \quad \text{ع -} = (\text{س} + \text{ت ص}) = (\text{س -} ) + \text{ت (ص -)}$$

° باقى طرح العددين  $\text{ع}_1$  ،  $\text{ع}_2$  هو

$$(18) \quad \text{ع} = \text{ع}_1 - \text{ع}_2 = (\text{س}_1 - \text{س}_2) + \text{ت} (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)$$

٨- القسمة : باستخدام الصورة الأسية :

$$(19) \quad \frac{1^{\mu}}{2^{\mu}} = \frac{1^{\theta} \text{هـ ت} 1^{\theta}}{2^{\theta} \text{هـ ت} 2^{\theta}} = \frac{1^{\text{ع}}}{2^{\text{ع}}}$$

أى أن خارج القسمة تكون قيمته المطلقة هى خارج قسمة القيمتين  
المطلقتين بينما تحور الزاوية  $\theta$  بمقدار  $\mu \theta$  فى اتجاه عقارب الساعة ، أى  
تطرح زاويتا الاتجاه . ونلاحظ أنه عند الضرب تضرب القيمتان المطلقتان وتجمع  
زاويتا الاتجاه .

وبالتعويض فى (١٩) نلاحظ أن :



$$(٢٠) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \theta - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \theta - 1 \right) \right] \frac{\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta} = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض عن حتا ، حا الفرق بما يساويانه بدلالة نسب الزوايا الأصلية  
ثم التعويض عن هذه الأخيرة بما تساويه بدلالة س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub> نحصل على تعبير  
لخارج القسمة بدلالة الأحداثيات الكرتيزية . ومن الممكن أن يتأكد القارئ  
من أن النتيجة سوف تتفق مع ما يمكن الحصول عليه بالقسمة المباشرة كالآتي :

$$\frac{(1/2 \theta - 1) (1/2 \theta + 1)}{(1/2 \theta - 1) (1/2 \theta + 1)} = \frac{1/2 \theta + 1/2 \theta}{1/2 \theta + 1/2 \theta} = \frac{1}{2}$$

$$(٢١) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \theta - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \theta + 1 \right) \right] \frac{1}{\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \theta} =$$

٩- الاعداد المركبة المترافقة : العددان ( س + ت ص ) ، ( س - ت ص ) يسميان  
عددان مركبان مترافقان Conjugate . وواضح أن كلا من مجموعهما  
وحاصل ضربهما يكون عددا حقيقيا لأن

$$( س + ت ص ) = ٢ هـ ت \theta = ٢ ( حتا \theta + ت حا \theta )$$

$$( س - ت ص ) = ٢ هـ - ت \theta = ٢ ( حتا \theta - ت حا \theta )$$

∴ بالجمع :

$$(٢٢) \text{ المجموع } = ٢ حتا \theta = ٢ ( هـ ت \theta + هـ - ت \theta ) = ٢ \theta$$

كما أنه بالضرب



$$\text{حاصل الضرب} = \theta^2 = (\text{حنا } \theta^2 + \text{حا } \theta^2) = \theta^2 = \theta^2 \text{ ص} + \theta^2 \text{ س}$$

ولهذه النتائج أهميتها في دراسة التقلبات الدورية .

تعيين قيمة  $\theta$  :

وقبل أن نختتم هذا القسم ، نورد بعض القواعد الخاصة بتحديد القيمة العددية للزاوية  $\theta$  . فمن المعلوم من (٢) أن  $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$  . وهناك قيمتان للزاوية بين صفر و  $\frac{\pi}{2}$  تحققان هذه العلاقة فأيهما نختار ؟ واضح أن القيمة الصحيحة هي التي تحقق إشارة س أو حنا  $\theta$  . فالجدول تعطى الظلال للزوايا بين صفر و  $\frac{\pi}{2}$  أي أننا نستطيع تعيين قيمة من الجدول واقعة بين  $-\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$  وفقا لإشارة  $\theta$  . أي أنه إذا كان  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \theta$  سالبة فأننا نختار قيمة بين  $(-\frac{\pi}{2} \text{ و صفر})$  أما إذا كانت  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \theta$  موجبة فأننا نختار قيمة بين  $(\text{صفر و } \frac{\pi}{2})$  . ولكن علينا أن نضيف بعد ذلك إما ط أو  $\frac{\pi}{2}$  وفقا لإشارة كل من س و ص . ومن الممكن أن نلخص هذه القواعد في الجدول التالي :

بوضع  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \theta$  ف  $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$  (ف تقع بين  $-\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$ )

| قيمة $\theta$                  | المدى الذي تقع فيه $\theta$ | إشارة س ، ف       | إشارة س ، ص       |              |
|--------------------------------|-----------------------------|-------------------|-------------------|--------------|
| $\theta = \text{ف}$            | صفر و $\frac{\pi}{2}$       | س < صفر و ف < صفر | س < صفر و ص < صفر | الربع الأول  |
| $\theta = \text{ط} + \text{ف}$ | $\frac{\pi}{2}$ و ط         | س > صفر و ف > صفر | س > صفر و ص < صفر | الربع الثاني |
| $\theta = \text{ط} + \text{ف}$ | ط و $\frac{3\pi}{2}$        | س > صفر و ف < صفر | س > صفر و ص > صفر | الربع الثالث |
| $\theta = \text{ط} + \text{ف}$ | $\frac{3\pi}{2}$ و ط        | س < صفر و ف > صفر | س < صفر و ص > صفر | الربع الرابع |



فالعمود الأول يبين الحالات الأربعة وفقا لاشارة كل من  $s$  ،  $v$  ،  $\theta$  فاذا ترجمنا هاتين الاشارتين الى اشارة لخارج القسمة  $\frac{v}{s}$  فانها تكون نفس اشارة  $f$  أى أن  $f$  تكون موجبة ( بين صفر ،  $\frac{\pi}{2}$  ) أو سالبة ( بين  $\frac{\pi}{2}$  ، صفر ) ؛ ومن اشارات  $s$  ،  $v$  نستنتج الربع الذى تقع فيه الزاوية  $\theta$  ، وبالتالى المدى الذى تقع فيه هذه الزاوية وبذا يسهل استخلاص قيم العمود الرابع .

## ٢ - كثيرات الحدود والمعادلات

١/٢ - تعاريف :

كثيرة الحدود polynomial هى مجموع القوى الصحيحة لمتغير  $s$  بمعاملات ثابتة . وتتحدد درجة degree كثيرة الحدود بأكبر قوة للمتغير  $s$  . وهى تأخذ الصورة

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 \quad (23)$$

المعادلة equation نحصل عليها بوضع  $D(s) = 0$

الجزور roots هى قيم  $s$  التى تحقق المعادلة . ولأى معادلة من الدرجة  $n$  يوجد جذور عددها  $n$  ، بعضها أو كلها حقيقية والباقي مركبة وتظهر كأزواج مترافقة . وقد تكون الجذور مختلفة كما أنه من الممكن أن تتساوى بعضها أو كلها .

٢/٢ - المعادلة من الدرجة الثانية : quadratic

الصورة العامة لهذه المعادلة هى :

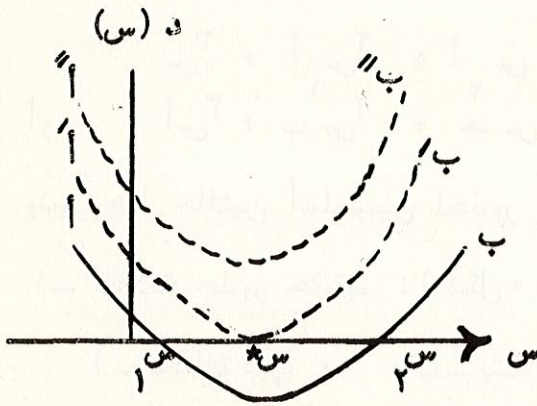


(٢٤)

$s^2 + as + a^2 = \text{صفر}$   
وهي عادة تكتب بالصورة الآتية :

(٢٤')

$as^2 + bs + c = \text{صفر}$   
ومن الممكن أن نميز بين ثلاثة حالات كما  
في شكل (٧) . فالحالة الأولى أ ب ، توجد  
قيمتان على المحور الأفقي تحققان تساوي  
قيمة الدالة د (س) مع الصفر ، وهما  $s_1$  و  $s_2$   
فهما جذران حقيقيان للمعادلة د (س) = صفر  
أما الحالة الثانية أ ب فهناك قيمة واحدة  $s^*$   
تحقق العلاقة المماثلة أي أن هناك جذران  
متساويان للمعادلة المناظرة .



( شكل ٩ )

أما الحالة الثالثة أ ب فلا توجد قيمة حقيقية ، ويكون الجذران تخيليان  
مترافقان .

وبوجه عام فإن الجذريين هما :

(٢٥)  $s_1, s_2 = \frac{1}{2a} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right)$

ويسمى المقدار  $b^2 - 4ac$  (أو  $\frac{b^2}{4a^2}$ ) بمميز المعادلة :

|                     |                                                          |
|---------------------|----------------------------------------------------------|
| إذا كان $b^2 < 4ac$ | كان الجذران حقيقيين ومختلفين                             |
| " " $b^2 = 4ac$     | كان الجذران حقيقيين ومتساويين ( $\frac{b^2}{4a^2} = 0$ ) |
| " " $b^2 > 4ac$     | كان الجذران تخيليين ( $\frac{b^2}{4a^2} < 0$ )           |



وفى كل من هذه الحالات فان

$$(٢٦) \quad \frac{b}{a} = \text{حاصل ضربهما } s_1 s_2 = \text{مجموع الجذرين } s_1 + s_2$$

٣/٢- المعادلة من الدرجة الثالثة : Cubic

وتأخذ الصورة

$$(٢٧) \quad \text{صفر} = s^3 + a s^2 + b s + c$$

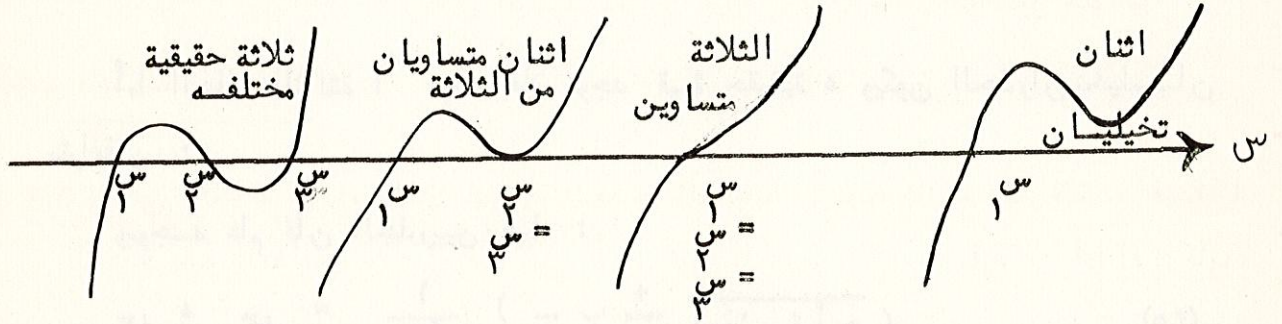
$$(٢٧) \quad \text{أو} \quad \text{صفر} = s^3 + a s^2 + b s + c$$

ونميز هنا حالتين أساسيتين لجذور هذه المعادلة وعددها ثلاثة :

١- الثلاثة جذور حقيقية : ( شكل ١٠ )

أ - مختلفة كلها • ب - يتساوى اثنان منهما • ج - الثلاثة تتساوى

٢- أحد الجذور حقيقى والآخران تخيليان



( شكل ١٠ )

ومعنى هذا أنه يجب أن يكون هناك جذر واحد أو ثلاثة جذور حقيقية • لنفرض أننا عرفنا أحد الجذور الحقيقية وليكن  $s_1$  • اذن نستطيع المعادلة (٢٧) كالآتى :



$$(s - s_1) (s^2 + s' + s + s') = \text{صفر}$$

ويصبح علينا أن نحلل العامل الثانى باعتباره معادلة تربيعيه ، ويأخذ التحليل  
النهائى الشكل الآتى :

$$(s - s_1) (s - s_2) (s - s_3) = \text{صفر}$$

ومن الواضح أن

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \text{مجموع الجذور} = s_1 + s_2 + s_3 \\ \text{مجموع حواصل ضرب كل اثنين} = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 \\ \text{حاصل ضرب الثلاثة} = s_1 s_2 s_3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{s^3}{1} = \text{أى معامل } s^3 \\ \frac{s^2}{1} = \text{أى معامل } s^2 \\ \frac{s}{1} = \text{أى الحد المطلق} \end{array}$$

وفيما عدا ذلك لا توجد صورة صريحة للتعبير عن كل جذر كما فى حالة المعادلة  
التربيعيه ، ولذا توجد طرق تقريبية تساعد على تعيين موضع الجذور حسابيا .

#### ٤/٢- الحالة العامة :

فى الحالة العامة اذا ظهرت الجذور التخيلية ظهرت كأزواج مترافقة . فاذا  
كانت درجة المعادلة  $n$  زوجية أمكن أن تكون الجذور كلها تخيلية . أما اذا كانت  
 $n$  فردية كان هناك جذر واحد على الأقل حقيقى .

ويلاحظ أن اشارة  $d$  ( $s$ ) تبقى ثابتة بين أى جذرين حقيقيين متتاليين ،  
وتتغير عند أى جذر حقيقى ، ولكنها لا تتغير عند الجذور التخيلية .



### ٣- الدوال المثلثية

#### ١/٣- صفات الدالة $\theta$ :

من المعلوم أن الدالة  $\sin \theta$  تظهر تقلبات منتظمة طولها  $2\pi$  بالنسبة إلى تغير  $\theta$  . وتأخذ الدالة  $\sin \theta$  نفس الشكل ولو أنها تتخلف عنها بمقدار  $\frac{\pi}{2}$  . ولذلك سنكتفى بدراسة  $\sin \theta$  التي تتميز بتمثلها بالنسبة لقيم  $\theta$  الموجبة ، وبأنها تبلغ القمة عند  $\theta = 0$  صفر . وهي لذلك تعتبر دالة دورية circular or sinusoidal لأنها تأخذ شكل دورات منتظمة . ولهذه الدوال ثلاثة خواص مميزة ( شكل ١١ ) .

١- الفترة : period وهذه عبارة عن المدى الذي تتغير فيه  $\theta$  بما يستكمل دورة واحدة وفي حالة الدورة المنتظمة تكون هذه الدورة ثابتة ، وبالنسبة للدالة  $\sin \theta$  تكون الفترة  $= 2\pi$  ط .

٢- السعة : amplitude ويقصد بالسعة بعدد القمة أو القاع من نقطة متوسطة وفي حالة الدورة المنتظمة تكون السعة ثابتة ، وتساوى  $\pm 1$  عندما تكون  $\sin \theta = 0$  وهي طبعاً تساوى  $\pm 1$  عندما  $\sin \theta = 0$  .

٣- المرحلة : phase ويقصد بها المرحلة من الدورة التي تأخذها الدالة عند  $\theta = 0$  صفر ونلاحظ أن الدالة  $\sin \theta$  تبلغ القمة (  $+1$  ) عند  $\theta = 0$  صفر والدالة الدورية تبلغ قمة عند نقطة معينة داخل الفترة الخاصة بها . وتكون الدالة المنتظمة متماثلة داخل كل فترة حول نقطة القمة .

#### ٢/٣- معالم الدالة المثلثية المنتظمة :

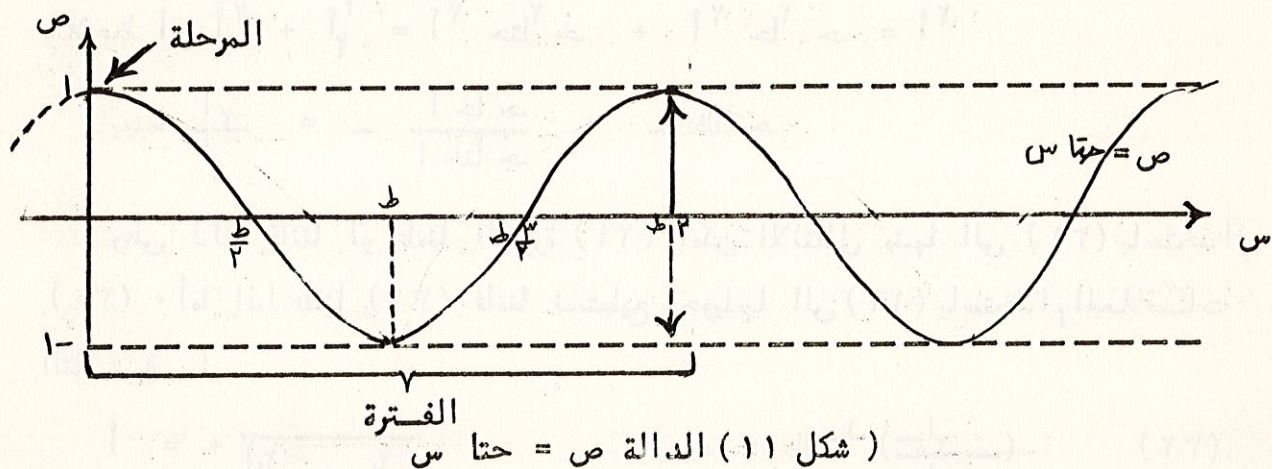
نستنتج من وجود ثلاثة صفات للدالة المثلثية المنتظمة أن الصورة العامة للدالة يجب أن تحتوى على ٣ معالم أ ، ب ، ح وتكون كالتى :



( ۲۹ )

ص = أ ح تا ( ب س + ح )

وهذه الدالة تكون محصورة بين الخطيين  $+A$  ،  $-A$  ولذلك تكون السعة =  $\pm A$  . أى أن المعلمة  $A$  تحدد السعة . وإذا وضعنا  $\theta = (B \sin + C \cos)$  فاننا نستطيع حساب طول الدورة أى الفترة بأخذ الفرق بين قيمتي  $S$  اللتين عندهما



$\theta = \text{صفر}$  ،  $\theta = 2\pi$  وواضح أنهما القيمتان  $s = -\frac{1}{2}$  ،  $s = \frac{1}{2}$  والفرق بينهما وهو الفترة  $= \frac{2\pi}{2}$  . أى أن الفترة تتحدد بالمعلمة  $b$  .

وأخيرا فان المرحلة تتحدد بقيمة الدالة عندما  $\theta = 0$  صفر وفي هذه النقطة تكون  $s = \frac{1}{2}$  وعندها تبلغ الدالة قمة  $\bullet$  أى أن المعلمة  $h$  تحدد المرحلة أى أن المعالم الثلاثة هي :

٢  
١- الفترة تحددها المعلمة ب وهي تساوي  $\frac{2}{b}$

٢- السعة تحددها المعلمة  $A$  وهي تساوي  $\pm A$

٣- المرحلة وتحدها ح حيث تبلغ الدالة قمة عند س =  $\frac{c}{c}$

ومن الممكن التعبير عن الدالة المنتظمة بصورة أخرى :



$$ص = أ \text{ حتا } (ب س + ح) * أ ( \text{حتا } ح \text{ حتا } ب س - \text{حا } ح \text{ حا } ب س )$$

$$(٣٠) \quad \text{موضع } أ \text{ حتا } ح = أ_1, \quad \text{و} \quad \text{حا } ح = أ_2$$

فاننا نجد أن

$$(٣١) \quad ص = أ_1 \text{ حتا } ب س + أ_2 \text{ حا } ب س$$

$$\text{ونلاحظ أن } أ_1 = أ_2 + أ_1 \text{ حتا } ح + أ_2 \text{ حا } ح = أ_2$$

$$\text{بينما } \frac{أ_2}{أ_1} = \frac{أ \text{ حا } ح}{أ \text{ حتا } ح} = - \text{ظا } ح$$

وعلى ذلك فاننا لو علمنا الصورة (٢٩) أمكن الانتقال منها الى (٣١) باستخدام (٣٠) أما اذا علمنا (٣١) فاننا نستطيع تحويلها الى (٢٩) باستخدام العلاقات التالية :

$$(٣٢) \quad ح = \text{ظا} - 1 \left( \frac{أ_2}{أ_1} - 1 \right) \quad \text{و} \quad \frac{أ_2}{أ_1} = 1 + \frac{أ_2}{أ_1}$$

ويمكن تحديد قيمة ح بين ( صفر و ٢ ط ) بنفس طريقة تحديد الزاوية  $\theta$  في الجدول الوارد بنهاية القسم الأول من هذا الفصل (ص ١٥).

ونلاحظ أن التحويل من  $أ_1$  ،  $أ_2$  الى  $أ$  ،  $ح$  بمثابة تحويل العدد المركب  $أ_1 - ت$   $أ_2$  من الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة الى  $أ ( \text{حتا } ح + ت \text{ حا } ح )$  بالاحداثيات القطبية .

### ٣/٣- تغيير السعة :

لنفرض الآن أنه مع بقاء الفترة ثابتة والمرحلة على حالها فان السعة تتغير مع تغير س . ولنفرض أن التغير يتم بصورة منتظمة بحيث يزيد باستمرار أو ينقص



باستمرار مع زيادة  $s$  . في الحالة الأولى يقال أن الدورة تباعدية anti-damped (شكل ١٢) or explosive وفي الحالة الثانية يقال أنها تقاربية damped (شكل ١٢) وعلى هذا نجد أن السعة تأخذ قيمة معينة عند نقطة الابتداء ولتكن  $A$  ونسميها السعة الابتدائية initial amplitude ثم تتغير بشكل معين يؤدي إلى تقاربها أو تباعدها . ولذلك اذن نحتاج إلى قياس هذه الصفة الجديدة للسعة بما يسمى معامل التقارب damping factor فإذا كان هذا المعامل يأخذ صورة نسبية ثابتة من نقطة لأخرى ، أمكننا أن نمثله بمعلمة رابعة  $m$  بحيث تأخذ السعة الصورة  $A e^{ms}$  حيث  $h$  هي الدالة الأسية . وطبعاً أن هذه ليست هي الطريقة الوحيدة التي يمكن أن تتغير بها السعة ، ولكنها الصورة التي تهمنا في التطبيقات التالية . ويلاحظ أننا نستطيع الحصول على نفس النتيجة لو كتبنا السعة =  $A e^{ms}$  حيث  $L = h$  أي أن  $m = L$  .

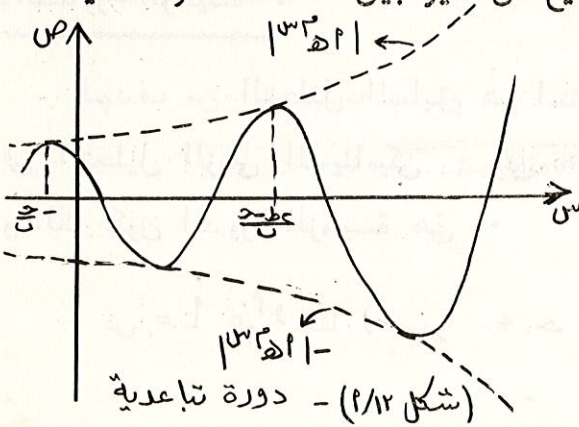
وعلى هذا فإن الصورة العامة للدالة المثلثية التي تتغير سعتها بانتظام هي :

$$(٣٣) \quad v = A e^{ms} \text{ حتماً } (b s + c)$$

$$(٣٣') \quad \text{أو } v = A e^{ms} \text{ حتماً } (b s + c)$$

أي أنها تحتوي على أربعة معالم . وتستطيع أن نميز بين ٣ حالات وفقاً لقيمة  $m$  :

$$١- m < 0 \text{ صفر : } ( \text{أو } L < 1 )$$



في هذه الحالة نجد أن الدورة

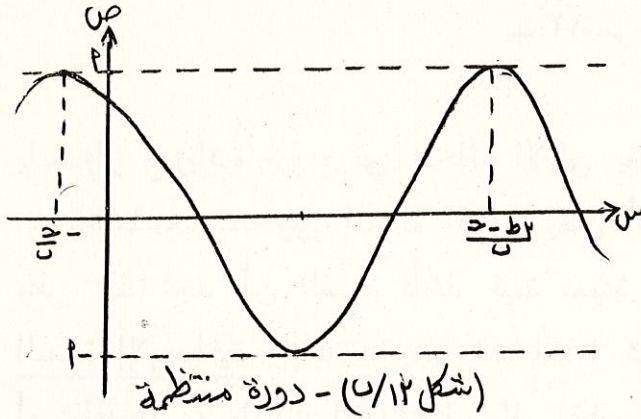
تزداد سعتها التي نجدتها واقعة

بين  $A e^{ms}$  ،  $A e^{ms}$

أي بين  $A e^{ms}$  ،  $A e^{ms}$

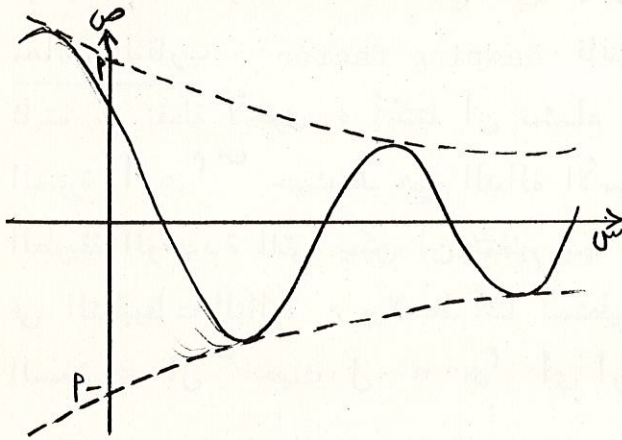
وتكون الدورة تباعدية شكل (١٢/أ)





٢- ٤ = صفر : ( أو ل = ١ )

وهنا تكون السعة ثابتة أى أن  
الدورة منتظمة ، وسعتها = أ  
أى أن الدورة المنتظمة تكون  
حالة خاصة من (٣٣) شكل (١٢/ب)



٣- ٤ > صفر : ( أو ل > ١ )

وهنا تكون الدورة تقاربية  
محدودة بين حدين كما  
فى الحالة الاولى .

وفى كل من هذه الحالات يمكن حساب السعة عند أى نقطة وهى  $\pm |أ هـ|$  أو  
 $\pm |أ ل|$  والحالة الخاصة التى فيها س = صفر تكون السعة هى  $\pm أ$  وهى السعة  
الابتدائية .

٤/٣- الدورات الزمنية :

الهدف من التحليل السابق هو استعراض خواص بعض الدوال التى ستصادفنا  
فى التحليل الزمنى الديناميكى . وفى هذه الحالة يكون المتغير س هو الزمن و .  
وبذلك تكون الدورة الزمنية هى .

ص = أ هـ وحتا ( ب و + ح ) ( و = الزمن ) (٣٤)



وفيها ٤ معالم : أ ، م ، ب ، ح ، وتحدد الصفات الأربع التالية :

١- الفترة ف =  $\frac{ط}{ب}$  . وإذا كانت الفترة قصيرة حسبنا تكرار الدورة خلال

وحدة الزمن وهو : ك =  $\frac{ب}{ط}$  . أى أن ك مقلوب ف .

٢- السعة الابتدائية = أ .

٣- معامل التقارب = م .

٤- المرحلة وتحدد بالقيمة عند  $و = - \frac{ح}{ب}$  .

م . سعيد











بالمثل  $ص_3 = ص_1 - ص_2 + ص_3 - ص_4 + \dots + ص_n$   
 أى أنه من الممكن التعبير عن  $ص_n$  بدلالة  $ص_1, ص_2, ص_3, \dots, ص_n$   
 وبالتعويض عن قيم  $س$  فى (١) نجد أنه من الممكن تحويل هذه الدالة الى

(۳ / ۲) ف ( ص ، ل ، ص ، و ..... ل ، ص ) = صفر

وهذه الصورة تبرر تسمية هذا النوع من المعادلات باسم معادلات الفروق .

وبالاحظ أن هـ رمز يشير الى اجراء عملية تحويل معينة ولذا أسميناه عامل تحويل أو باختصار عامل ، ولكنه مع ذلك يمكن محالته بالقواعد الجبرية العادية ومن الممكن أيضا تعريف عاملين آخرين أحدهما عامل تعجيل : ل ، والآخر عامل ابطاء : ط ، وذلك كالآتي :

(٤/٢)  $ل صو = صو + ١$        $ط صو = صو - ١$

وعلى ذلك فان

$$(5/2) \quad \psi_{(1-p)} = \psi_1 - \psi_0 = \Delta \psi$$

ومعنى هذا أن

$$(7/2) \quad (A-1) = B \quad , \quad (B-1) = A \quad , \quad 1-J = B$$

وتطبيق هذه العلاقات على المعادلات السابقة نجد أن :

$$r_{(A-1)}^{صو} = r_{ط}^{صو} = r_{صو-م}$$

$$\dots + \frac{1}{r} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} (1 -) + \dots + \frac{1}{r} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \Delta \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} =$$

(۷/۲)  $\sum_{i=1}^n f_i(x) + \dots +$

ومن الممكن التأكد من هذه النتيجة ، التي توصلنا اليها بتطبيق ذات الحدين

على العامل <sup>فيه</sup> ، بأخذ الفروق المتتالية والتعويض كما فعلنا من قبل . فنبوض



٢ = ١ ثم ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ نستطيع التعبير عن ص<sub>١</sub> ، ٠٠٠ بالشكل السابق .

مثال (١-٢/١) : المعادلة ص = ص<sub>١</sub> - ص<sub>٢</sub> - ٢ - ٢ + ٣

يمكن كتابتها كالتى : ص = ٢ (ص - ص) - ٢ (ص - ص) + ٢ - ٣

$$ص = ٢ - ص - ٢ + ٣$$

٣/١ - معادلات الفروق الخطية بمعاملات ثابتة :

المعادلة الخطية من المرتبة n بمعاملات ثابتة ( وجد مطلق متغير أو ثابت ) هي

$$أ. ص + ١ ص - ١ + ٢ ص - ٢ + ٠٠٠ + أ ص - ص = د (و) \quad (٨/٢)$$

حيث أ ص صفر ، د (و) تشير الى متغير يأخذ شكل دالة فى الزمن بينما المعاملات أ ص ثابتة ، أى لا تتوقف على و . وتسمى الصورة (٨) معادلة غـير متجانسة . فاذا حذفنا د (و) أى ساويناها بالصفر فان المعادلة تصبح :

$$أ. ص + ١ ص - ١ + ٢ ص - ٢ + ٠٠٠ + أ ص - ص = صفر \quad (٩/٢)$$

وهى متجانسة .

ولكى نحصل على حل للمعادلة (٨) نفرض أننا نعلم قيم ص فى n من النقط المتتالية ولتكن هى

$$ص_١ = ق_١ \quad ص_٢ = ق_٢ \quad ٠٠٠ \quad ص_n = ق_n$$

هذه القيم تسمى القيم الابتدائية ، بحيث أنه اذا عوضنا بها فى الطرف الأيمن من (٨) أمكن معرفة قيمة ص<sub>n+١</sub> وباستخدام هذه الأخيرة والقيم ق<sub>٢</sub> الى ق<sub>n</sub> نحصل على ص<sub>n+٢</sub> وهكذا . ومعنى هذا أننا بمعلومية n من القيم الابتدائية



نستطيع استنتاج المجزى الزمنى لقيم ص . غير أن معرفة قيمة معينة ص<sub>١</sub> تتطلب معرفة ص<sub>١</sub> . غير أننا نستطيع أن نعالج المشكلة كالتالى :

المعادلة (٨) تماثل كثيرات الحدود من الدرجة ٨ فيما عدا أن الأسس مستبدلة هنا بالأدلة الزمنية ، فإذا أمكن تحويل (٨) الى كثيرة حدود وجدنا أنه من الممكن إيجاد ٨ جذر لها وحساب قيمة ص مباشرة بمجرد معلومية نقطة الزمن التى يراد حساب ص لها .

ومن الممكن توضيح هذه الفكرة بمعالجة حالات خاصة .

## ٢- معادلات المرتبة الأولى بمعاملات ثابتة

١/٢- معنى حل المعادلة :

لنفرض أن لدينا معادلة :

$$ص = ٣ص - ١ - ١٠ \quad ( \text{حيث } ص = ٨ ) \quad (١٠/٢)$$

من الممكن أن نرى أن (١٠) تتحقق اذا كانت

$$ص = ٣ + ١ + ٥ \quad (١١/٢)$$

ويمكن اعتبارها حلا لتلك المعادلة لأنها تحقق الخاصيتين الآتيتين :

١- أنها تحقق القيمة الابتدائية ص = ٨ ، اذ بوضع و = صفر

$$٨ = ٣ + ٥ \quad \text{كما هو مفروض}$$

٢- أنها تحقق جميع قيم ص و لأى نقطة و . ولأثبات ذلك نثبت أنها اذا حققت

( و - ١ ) فسوف تحقق و ، وبما أنها تحقق النقطة صفر فهى تحقق ١ و ٦

وبالتالى ٢ ثم ٣ وهكذا .



واضح أنه بوضع و-١ مكان و فان هذه العلاقة تعنى أن

$$ص_و-١ = ٥ + ٣$$

وبالتعويض فى الطرف الأيسر من (١٠) نجد أن

$$٣ ص_و-١ = ١٠ - (٥ + ٣) = ٢ \quad ٣ = ١٠ - ٥ + ٣ = ٨$$

أى أنها تجعل الطرف الأيسر من (١٠) يساوى الطرف الأيمن . ونستخلص من ذلك القاعدة التالية

قاعدة رقم (١) : أى صيغة تعطى مجموعة من القيم تحقق كلا من معادلة الفروق والقيم الابتدائية تعتبر حلا لمعادلة الفروق .

وللوصول الى الحل نفرض أن لدينا معادلة متجانسة :

$$ص_و = أ ص_و-١ \quad ( \text{بمعلومية } ص_١ = ق ) \quad (١٢/٢)$$

$$\begin{aligned} \therefore ص_٢ = ق \cdot أ , ص_٣ = أ ق \cdot أ , ص_٤ = أ^٢ ق , \dots \dots \dots \\ ص_٣ = أ^٢ ق = أ ق \cdot أ = أ ق \cdot أ \cdot أ = أ^٣ ق \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ومن الممكن أن نستنتج بداهة أن الحل العام هو :

$$ص_و = ق \cdot أ^و$$

ولكننا نزيد طريقة عامة للوصول الى هذا الحل (١٣/٢)

٢/٢ - طريقة استخلاص الحل فى حالة المعادلة المتجانسة :

لنفرض فرضا تعسفيا هو أن الحل يأخذ الشكل

$$ص = م^و \quad (١٤/٢)$$



واضح أنه لو وضعت  $m = a$  فان هذا الحل يحقق معادلة المفروق (١٢)  
لأن الطرف الأيمن  $= m$  بينما الأيسر  $a - 1$  وتساوى الطرفين معناه أن  $m = a$

$$\therefore \text{ص} = \text{أ}^9 \quad (١٤/٢)$$

ولكن عندما  $w = \text{ص}$  فان  $\text{ص} = a$  أى أنها  $q$  ، وهذا يعنى أن (١٤)  
ليست حلا نهائيا . وهذا يتطلب استخدام قاعدة أخرى هي :

قاعدة رقم (٢) : اذا كانت  $d$  (و) هي أى صيغة تحقق معادلة فروق متجانسة فان

$$d^* (و) = ك \times d (و)$$

تحقق هي الأخرى المعادلة ، حيث  $ك$  مقدار ثابت ما .

وتتضح صحة هذه القاعدة بسبب تجانس (١٢) . وعلى ذلك يمكن أن نبدأ بافتراض أن

$$\text{ص} = ك \cdot m^9 \quad (١٤/٢)$$

وهذا فرض يحقق (١٢) كما أنه عندما  $w = \text{ص}$  فان  $ك = q$  ، أى أن الحل هو

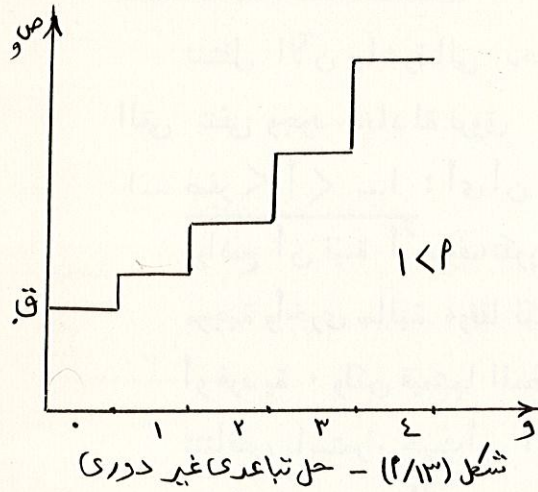
$$\text{ص} = q \cdot \text{أ}^9 \quad (١٥/٢)$$

٣/٢ - الأشكال المختلفة التى يعطيها الحل :

واضح أن الحل أى المجرى الزمنى للمتغير  $v$  ، يتوقف على الثابتين  $q$  ،  $a$   
وسنبدأ بافتراض أن  $q = \text{مقدار موجب}$  . واضح أنه يمكن تمييز الحالات المختلفة  
الآتية وفقا لقيمة  $a$  :

$a - q \leq \text{صفر}$  ،  $a < \text{صفر}$  : وهذه تشمل الحالات الثلاثة التالية :

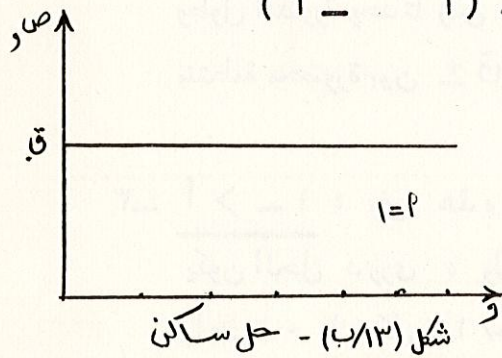




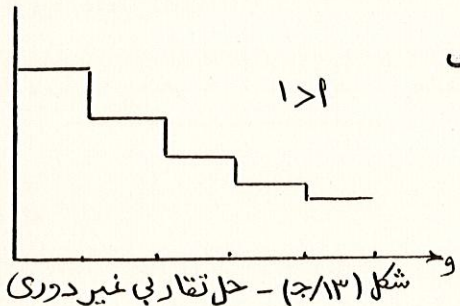
١-  $١ < ا$  : من الواضح أن قيمة ص سوف تتزايد باستمرار بمقادير متزايدة . فمن الواضح أن  $١ < ا$  صفر . وعلى ذلك نستطيع ضرب طرفي المتباينة  $١ < ا$  في المقدار  $١ - ا$  بدون تغيير إشارة المتباينة .  
 $\therefore ١ < ا \Rightarrow ١ - ا < ٠$

$$\frac{١ - ا}{١ - ا} = ١ < ا \quad \text{فان } ١ < ا \text{ صفر ، فان } ١ < ا$$

ومضرب الطرفين في  $(١ - ا)$  نجد أن  $(١ - ا) < (١ - ا)٢$  . ومضرب الطرفين في  $١ - ا$   
 $\therefore (١ - ا) < (١ - ا)٢$



أى أن الحل يكون تباعدي وغير دوري .  
 ٢-  $١ = ا$  : في هذه الحالة يكون  $١ = ا$  لجميع قيم و . أى أن ص تكون ثابتة وبذلك نحصل على حل ساكن ( غير دوري ) ، ( شكل ٣/١٣ ) .

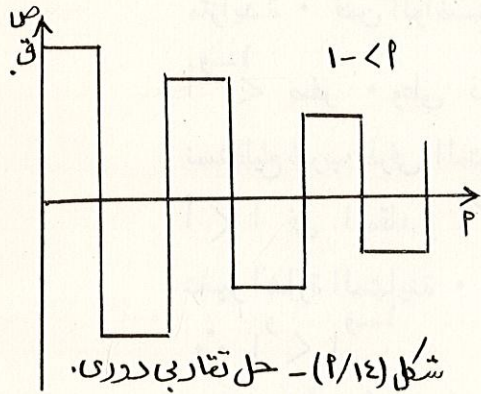


٣-  $صفر > ا$  : وهذه عكس الحالة الأولى لأنه بنفس الطريقة السابقة نجد أن  $١ - ا > ٠$  وأن  $١ - ا > ٠$  .  
 ومعنى هذا أن قيمة ص تتناقص بمقادير متناقصة . أى أن الحل يكون تقاربي وغير دوري . ( شكل ٤/١٣ ) .

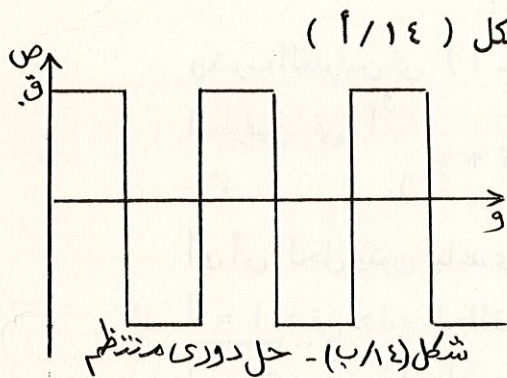


ب- ق. < صفر ، أ > صفر :

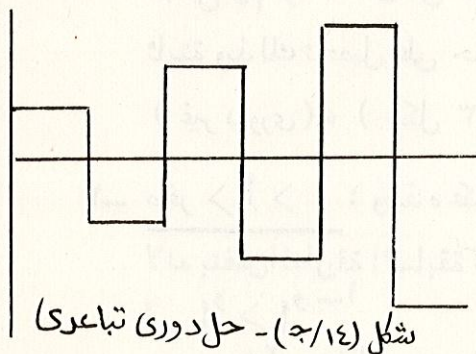
ننتقل الآن مباشرة الى الحالة التي فيها أ سالبة ، أى باهمال حالة أ = صفر التي تنفى وجود معادلة فروق . وهنا أيضا نميز ثلاثة حالات



١- صفر < أ < ١ : أى أن أ كسر سالب وواضح أن قيمة أ<sup>٢</sup> سوف تكون قيمتها مرة موجبة وأخرى سالبة ، وفقا لكون و زوجية أو فردية . ولكن قيمتها المطلقة تتناقص باستمرار حيث أن  $١ > أ$  وبذلك تكون قيمة أ<sup>٢</sup> محصورة بين  $± أ$  ، وهذه ينطبق عليها الحالة



( أ / ٣ ) أى أن الحل دوري تقاربي وطول الدورة وحدتا زمن .  
٢- أ = ١ : والحل هنا أيضا دوري وطول الدورة وحدتا زمن ، ولكن الدورة منتظمة محصورة بين  $± ق. شكل ١٤/ب$



٣- أ > ١ : وفي هذه الحالة يكون الحل دوري ، ولكنها دورة تباعدية . ( شكل ١٤/ج ) .



ح- ق.  $\langle \text{صفر} , \text{أ} \rangle < \text{صفر} :$

نستطيع هنا أن نميز بين الحالات الثلاثة المميزة في ( أ ) والفارق الوحيد هو أن جميع الحلول تقع أسفل المحور الأفقي آخذة الوضع المنعكس لما هو مبين في الاشكال (١٣) .

د- ق.  $\langle \text{صفر} , \text{أ} \rangle > \text{صفر} :$

تأخذ الحلول هنا أيضا شكلا دوريا كما هو مبين في (ب) والأشكال (١٤) .

٤/٢- حل المعادلة غير المتجانسة بحد مطلق ثابت :

• لنفرض الآن أن المعادلة أخذت الشكل

$$\text{صو} = \text{أ صو} - ١ + \text{ك} \quad (١٦/٢)$$

لا يمكن أن نطبق القواعد السابقة مباشرة • ولذلك نبحث عن حل خاص

*particular solution* ولنفرض أنه المقدار الثابت ص ، لجميع قيم و

وبالتعويض به في (١٦) نجد أن

$$\frac{\text{ك}}{\text{أ} - ١} = \text{ص} \quad (\text{أ} \neq ١) \quad (١٧/٢)$$

فاذا عرفنا الانحرافات عن هذا الحل بأنها ضو ، فان

$$\text{ضو} = \text{صو} - \text{ص} \quad (١٨/٢)$$

$$\text{اذن صو} = \text{ضو} + \frac{\text{ك}}{\text{أ} - ١} , \quad \text{صو} - ١ = \text{ضو} + \frac{\text{ك}}{\text{أ} - ١}$$

وبالتعويض في (١٦) نجد أنها تتحول الى

$$\text{ضو} = \text{أ ضو} - ١ \quad (١٩/٢)$$

وهذه معادلة متجانسة ، يمكن الحصول عليها بأن نطرح من (١٦) مباشرة



المعادلة التي نحصل عليها بالتعويض فيها بالقيمة  $\hat{v}$  . أى  $\hat{v} = \hat{a} + k$  ووفقا للقواعد السابقة نفرض أن الحل هو

ف نجد أن :  $b = \hat{v} - \hat{a}$  أى أن  $\hat{v} = \hat{a} + b$  . وباستخدام (١٨) نحصل على

$$(\hat{v} - \hat{a}) = (\hat{v} - \hat{a})$$

أى أن

$$\hat{v} = \frac{k}{1-a} + (\hat{v} - \hat{a}) \quad (20/2)$$

مثال (١-٤/٢) لنفرض أننا أردنا حل المعادلة (١٠) بعاليه . واضح أن

$$\hat{v} = \frac{10}{3-1} = 5$$

اذن الحل هو

$$\hat{v} = 5 = 5 - 8 + 5 = 5 \times 3 + 5 = 5 + 1$$

وهو الحل الوارد فى المعادلة (١١) . ونلاحظ أنه لو كانت  $\hat{v} = 5$  أى

$$\hat{v} = 5 = 5 - 5 + 5 = 5 \times 3 + 5 = 5$$

أى أن  $5$  تحقق الحل بشكل يضمن ثبات قيم  $\hat{v}$  عند  $\hat{v}$  ولهذا أسميناها

حلا خاصا .

مثال (٢-٤/٢) لنفرض أن السكان يزيدون بمعدل ثابت  $m$  .

$$\therefore \hat{v} = \frac{\hat{v} + 1 - m}{m} \quad (\text{بمعلومية } \hat{v})$$

$$\therefore \hat{v} + 1 - m = m \hat{v}$$

$$\text{أى أن } \hat{v} = \frac{m+1}{m-1}$$



فإذا كانت  $m < 0$  صفر ، فإن الحل يكون تباعدي وغير دورى .  
 مثال (٣-٤/٢) فى نموذج ديناميكى للمكرر نفرض أن الانفاق  $q_0$  فى الفترة  $t$  و  
 يكون نسبة مثل  $h$  من الانفاق  $q_{t-1}$  فى الفترة السابقة . ولنفرض أن الانفاق  
 الابتدائى الذى تقوم به الحكومة =  $s$  .

$$\therefore q_0 = h q_{t-1} \quad q_t = s$$

فالحل هو :  $q_t = s$   $q_{t-1} = s$

فإذا كانت  $h > 0$  موجبة وأقل من الوحدة فإن الحل يكون تقاربى غير دورى .  
 مثال (٤-٤/٢) نموذج هارود يفترض أن :

$$s_0 = h (y_0 + 1 - y_1) \quad x_0 = b y_0 \quad x_1 = s_0$$

حيث  $s$  = الاستثمار ،  $x$  = الادخار ،  $y$  = الدخل .

$$\therefore h (y_0 + 1 - y_1) = b y_0$$

$$\therefore y_0 = (1 + \frac{b}{h}) (y_1 - 1)$$

والحل هو

$$y_0 = y_1 (1 + \frac{b}{h})$$

حيث  $\frac{b}{h} < 0$  صفر ، فالحل تباعدي غير دورى .

\*\*\*\*\*

ومن الممكن أن نشير هنا الى قاعدة يمكن استخدامها فى الحالات التالية  
 فباستخدام عامل الابطاء  $\tau$  نلاحظ أن المعادلة (١٦) يمكن كتابتها كالاتى :

$$(1 - \tau) (A - \tau) = K$$

(٢١/٢)



وللحصول على الحل الخاص ، نضع  $\tau = 1$  ، فيكون  $(1 - \alpha) \hat{v} = k$  ومنها نحصل على (١٧) بشرط أن  $\alpha \neq 1$

٥/٢ - مغزى الحل الخاص :

من الممكن أن يأخذ الحل الخاص (١٧) عدة أشكال ، وذلك كالاتى :

١- الحالة الأولى :  $\hat{v} = \text{ثابت}$  . هذه هي الحالة التى افترضناها بالنسبة الى (١٦) وكما رأينا فان هذا يقتضى أن تكون  $\alpha \neq 1$  وواضح من هذا أنه لو تحقق ذلك فان من الممكن أن يأخذ المتغير  $\hat{v}$  القيمة  $\hat{v}$  فى فترة ما فيبقى عندها بعد ذلك باستمرار . ومعنى هذا أن  $\hat{v}$  تمثل توازنا ساكنا *stationary equilibrium*

٢- الحالة الثانية :  $\hat{v} = \text{دالة زمنية}$  . لنفرض أن المعادلة (١٦) أخذت الشكل :

$$\hat{v}_t = \alpha \hat{v}_{t-1} + \beta \quad (21/2)$$

فى هذه الحالة لا يمكن أن نفترض حلا مثل (١٧) لأن  $\alpha = 1$  . ولكن من الواضح أن (٢١) يمكن كتابتها كالاتى :

$$\Delta \hat{v}_t = \beta \quad (21/2')$$

أى أن الذى يمكن اعتباره ثابتا ليس هو قيمة  $\hat{v}$  بل الفرق الأول لها ( بالنسبة الى  $t$  ) ومعنى هذا أن الحل الخاص يكون دالة خطية فى الزمن . ولنفرض أن هذا الحل هو :

$$\hat{v}_t^* = k + m \times t \quad (22/2)$$

وحسب هذا الغرض يكون :  $\Delta \hat{v}_t^* = (k + m + m) - (k + m) = m$



أى أن  $m = b \cdot$  ولتعيين الثابت  $k$  نفترض أن (٢٢) تحقق نقطة الصفر ومنها  $k = ص \cdot$  أى أن الحل الخاص يكون :

$$ص \hat{و} = ص \cdot + ب \cdot و \quad (٢٢/٢)$$

أى أن الحل الخاص أخذ شكل دالة زمنية هى عبارة عن خط اتجاه عام مستقيم  $\cdot$  وهذا الحل اذا عوضنا به فى (٢١) يستنفذ كل المعلومات التى فيها (لأن  $ض = صفر$ ) أى أن (٢٢/٢) تعتبر هى الحل العام  $\cdot$

ولذلك يمكن أن نعدل الحل بأن نفترض أن :

$$ص \hat{و} = ع \cdot و \quad (٢٣/٢)$$

وهذا يحقق (٢١) حيث  $ع = ب$

$$\therefore ص \hat{و} = ب \cdot و \quad (٢٣/٢)$$

وبأخذ الانحرافات :  $ض و = ص و - ص \hat{و}$

$$\therefore ص و = ض و + ب و = (ض و - ١ + ب و - ب) + ب \quad (٢٤/٢)$$

ومنها  $ض و = ض و - ١$

$$\text{وهذه حلها هو } ض و = ض \cdot (١) = ض \cdot$$

حيث  $ض \cdot = ص \cdot - ص \hat{و} = ص \cdot - صفر = ص \cdot$

$$\therefore ض و = (ص و - ص \hat{و}) = ض \cdot = ص \cdot$$

$$\therefore ص و = ص \cdot + ب و \quad (٢٥/٢)$$

كما فى (٢٢)  $\cdot$  أى أن (٢٥) أو (٢٢) هى الحل العام  $\cdot$



ومعنى هذا أن التوازن فى هذه الحالة ليس ساكنا بل يعتبر أنه  
توازن متحرك *moving equilibrium*

٣- الحالة الثالثة : الحد المطلق دالة متغير فى الزمن - من الممكن أن تأخذ  
هذه الدالة عدة أشكال ولنفرض أولا أنها دالة كثيرة الحدود :

$$ص_و = أ ص_و - ١ + ب_١ و + ب_٢ و^٢ + ب_٣ و^٣ + ب_٤ و^٤ + ب_٥ و^٥ + ب_٦ و^٦ + ب_٧ و^٧ + ب_٨ و^٨ + ب_٩ و^٩ + ب_{١٠} و^{١٠} \quad (٢٦/٢)$$

واضح أن هذا يعنى أن المقدار (ص\_و - أ ص\_و - ١) يتحرك حول منحنى  
اتجاه عام من الدرجة الثانية . والحصول على حل فى ص يتطلب دراسة نوع  
الدالة الزمنية التى تتغير حولها ص فقط . لذلك نأخذ فرضا تعسفيا \*  
هو أن :

$$ص_و = ح_٠ + ح_١ و + ح_٢ و^٢ + ح_٣ و^٣ + ح_٤ و^٤ + ح_٥ و^٥ + ح_٦ و^٦ + ح_٧ و^٧ + ح_٨ و^٨ + ح_٩ و^٩ + ح_{١٠} و^{١٠} \quad (٢٧/٢)$$

$$\text{ومعنى هذا أن } ص_و - ١ = ح_٠ + ح_١ (و - ١) + ح_٢ (و - ١)^٢ + ح_٣ (و - ١)^٣ + ح_٤ (و - ١)^٤ + ح_٥ (و - ١)^٥ + ح_٦ (و - ١)^٦ + ح_٧ (و - ١)^٧ + ح_٨ (و - ١)^٨ + ح_٩ (و - ١)^٩ + ح_{١٠} (و - ١)^{١٠}$$

$$= (ح_٠ + ح_١ و + ح_٢ و^٢ + ح_٣ و^٣ + ح_٤ و^٤ + ح_٥ و^٥ + ح_٦ و^٦ + ح_٧ و^٧ + ح_٨ و^٨ + ح_٩ و^٩ + ح_{١٠} و^{١٠}) - (ح_٠ + ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ + ح_٩ + ح_{١٠})$$

وبالتعويض فى (٢٦) نجد أن :

$$[ح_٠ + ح_١ و + ح_٢ و^٢ + ح_٣ و^٣ + ح_٤ و^٤ + ح_٥ و^٥ + ح_٦ و^٦ + ح_٧ و^٧ + ح_٨ و^٨ + ح_٩ و^٩ + ح_{١٠} و^{١٠}] - (ح_٠ + ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ + ح_٩ + ح_{١٠})$$

$$= ب_٠ + ب_١ و + ب_٢ و^٢ + ب_٣ و^٣ + ب_٤ و^٤ + ب_٥ و^٥ + ب_٦ و^٦ + ب_٧ و^٧ + ب_٨ و^٨ + ب_٩ و^٩ + ب_{١٠} و^{١٠}$$

وبمساواة المعاملات المتناظرة لقوى و نجد أن

$$ب_٠ = ح_٠ - (ح_٠ + ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ + ح_٩ + ح_{١٠})$$

$$ب_١ = ح_١ - (ح_١ + ٢ ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ + ح_٩ + ح_{١٠})$$

$$ب_٢ = ح_٢ - (٢ ح_٢ + ٣ ح_٣ + ٤ ح_٤ + ٥ ح_٥ + ٦ ح_٦ + ٧ ح_٧ + ٨ ح_٨ + ٩ ح_٩ + ١٠ ح_{١٠})$$

(\*) أنظر أيضا بند (٣/٤)



ومنها نجد أن

$$(28/2) \quad \begin{cases} \frac{2}{2(1-1)} - \frac{1}{1-1} = 1 & \frac{2}{1-1} = 2 \\ \frac{(1+1)}{3(1-1)} + \frac{1}{2(1-1)} - \frac{1}{1-1} = 0 \end{cases}$$

وبالتعويض بهذه القيم في (٢٧) والطرح من (٢٦) نحصل على معادلة بالشكل (١٩) تحل كالمعتاد .

مثال (١-٥/٢) - نفرض أن معادلة الفروق كانت

$$ص_0 = \frac{1}{3} + ص_1 + 2 + 3 + 2 + 2$$

بالتعويض في العلاقات (٢٨) نجد أن

$$ص_0 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 \quad (ومنها ص_1 = \frac{9}{4})$$

ويكون الحل العام هو

$$ص_0 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 + (ص_1 - \frac{9}{4}) \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

نلاحظ من هذا المثال أن الحل الخاص يأخذ شكلا مماثلا ( في الغالب) للدالة د (و) التي تظهر في معادلة الفروق . وسوف نعطي فيما بعد صورة أعم للحل معتمدة على دالة في العامل ط أو ل (بند ٣/٤) .



### ٣ — المعادلات الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

#### ١/٣ — المعادلة المتجانسة :

تأخذ هذه المعادلة الشكل العام :

(٢٩/٢)

$$أ ض و + ب ض و - ١ + ح ض و - ٢ = صفر$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها باستخدام العامل ط أول :

(٣٠/٢)

$$\begin{cases} (أ + ب ط + ح ط - ٢) ض و = صفر \\ (أ ل + ب ل + ح) ط - ٢ ض و = صفر \end{cases}$$

لنفرض أن الحل أخذ الشكل

(٣١/٢)

$$ض و = م$$

$$∴ أ م + ب م - ١ + ح م - ٢ = صفر$$

أى أن

(٣٢/٢)

$$(أ م + ب م + ح) م - ٢ = صفر$$

ومقارنة هذه الصورة بالمعادلة الثانية فى (٣٠) نلاحظ أن كلا منهما يتطلب

جعل

(٣٣/٢)

$$(أ ل + ب ل + ح) = صفر \text{ أو } (أ م + ب م + ح) = صفر$$

معنى هذا أننا نستطيع أن نعتبر العامل ل يسلك مسلك العدد م • ومن الممكن اعتبار أياً من هاتين المعادلتين معادلة مميزة لمعادلة الفروق الأصلية أو معادلة مساعدة •



والجذران هما :

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_2} \left( \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2} \right) \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_2} \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right)$$

ويكون الحل هو :  $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_2}$  أو  $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_2}$  (٣٤/٢)

( حيث أننا نعامل ل مثل م في (٣١) . ولكننا نريد حلا عاما ، وهذا يدعو الى القاعدة التالية .

قاعدة رقم (٣) : اذا كان كل من  $\frac{1}{p_2}$  ،  $\frac{1}{p_2}$  حلين يحققان معادلة الفروق ، فان  $\left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right)$  تحققها هي الأخرى ، حيث  $\frac{1}{p_2}$  ،  $\frac{1}{p_2}$  ثابتهما .

هذه القاعدة تعميم للقاعدة رقم (٢) . ونلاحظ أن معنى أن الحلين يحققان المعادلة هو :

$$A = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} = \text{صفر}$$

$$A = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} = \text{صفر}$$

اذن بالضرب في  $\frac{1}{p_2}$  ،  $\frac{1}{p_2}$  والجمع :

$$A = \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right) + \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right) + \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right)$$

$$+ \left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right) = \text{صفر}$$

وواضح أن هذا يحقق الحل  $\left( \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2} \right)$  وهو أعم من أى من الحلين

الأصليين اللذين نحصل على كل منهما كحالة خاصة منه ( بوضع  $\frac{1}{p_2} = \text{صفر}$  أو  $\frac{1}{p_2} = \text{صفر}$  )

اذن الحل العام للمعادلة (٢٩) هو

(٣٥/٢)

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2}$$



ولتعيين الثابتين  $K_1$  ،  $K_2$  يلزمنا قيمتان ابتدائيتان :  $ض_1 = ق_1$  ،  
 $ض_2 = ق_2$  مثلاً .

$$\therefore K_1 + K_2 = ق_1$$

$$ل_1 K_1 + ل_2 K_2 = ق_2$$

ويحل هاتين المعادلتين نحصل على الثابتين .

مثال (١-٣) : حل المعادلة الآتية بمعلومية  $ض_1 = \frac{3}{2}$  ،  $ض_2 = 1$

$$ض_1 = 2 - ض_2 - \frac{3}{4}$$

المعادلة المميزة هي

$$ل^2 - 2ل - \frac{3}{4} = 0$$

ويكون الحل العام هو

$$ض_0 = ك_1 \left(\frac{3}{2}\right) + ك_2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{3}{2} = ك_1 + ك_2$$

$$ومنها ك_1 = \frac{1}{4} ، ك_2 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore ض_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال (٢-٣) : حل المعادلة :  $ض_1 = 3 - ض_2$

$$بمعلومية  $ض_1 = 2$  ،  $ض_2 = 4$$$



المعادلة المميزة هي :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \quad 3 = \frac{1}{1} \quad \therefore \quad 4 - 3 = 1 = \text{صفر} \\ \therefore \quad \text{ضو} &= \frac{1}{1} \left( \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{1} \right) + \frac{1}{1} \left( \frac{1}{2} \right) \\ 1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \quad \therefore \quad 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \quad 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \\ \text{أى أن الحل العام هو} \\ \text{ضو} &= 1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

٢/٣- المعادلة غير المتجانسة :

لنفرض أن معادلة الفروق كانت غير متجانسة :

$$(36/2) \quad \text{أ} \text{ضو} + \text{ب} \text{ضو} - 1 + \text{ح} \text{ضو} - 1 = \text{د}$$

حيث  $\text{د} = \text{د}(\text{و})$  دالة في الزمن : مثلاً مقدار أو كثيرة حدود الخ . .  
ولنفرض أن  $\text{ضو} = \text{ع}$  ( حيث  $\text{ع}$  هي الأخرى دالة في الزمن : مقدار ثابت أو متغير )  
هل الحل الخاص المناظر للمعادلة (١٧) . أى أن  $\text{ع} = \text{ع}$  تحقق المعادلة (٣٦)  
فإذا كانت المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (٣٦) هي

$$(29/2) \quad \text{أ} \text{ضو} + \text{ب} \text{ضو} - 1 + \text{ح} \text{ضو} - 1 = \text{صفر}$$

وهي نفس المعادلة التي درسناها في البند السابق ، فاننا نستطيع —  
استخلاص القاعدة التالية :

قاعدة رقم (٤) : إذا كانت  $\text{س}$  تحقق المعادلة (٣٦) في صورتها المتجانسة (٢٩)  
بينما  $\text{ع}$  تحقق المعادلة الأصلية ، فإن المقدار  $(\text{س} + \text{ع} \text{و})$  يحقق (٣٦)  
نفسها ، ولا ثبات ذلك نعوض في (٣٦) .



$$\begin{aligned} & \therefore \text{أ} (س و + ع و) + \text{ب} (س و - ١ + ع و - ١) + \text{ح} (س و - ٢ + ع و - ٢) \\ &= (\text{أ} س و + \text{ب} س و - ١ + \text{ح} س و - ٢) + (\text{أ} ع و + \text{ب} ع و - ١ + \text{ح} ع و - ٢) \end{aligned}$$

$$\text{د} = \text{د} + \text{صفر}$$

أى أن (س و + ع و) حققت (٣٦) .

وعلى هذا فإن حل المعادلة غير المتجانسة يتطلب الحصول على الحل س و للمعادلة المتجانسة بالطريقة السابق ذكرها ، والحصول على الحل الخاص ع و ٤ وهنا كما فى بند (٥/٢) يمكن التمييز بين عدة حالات :

١- د = ثابت . فى هذه الحالة نفترض أن الحل الخاص هو الثابت ع ، وبالتعويض فى (٣٦) نجد أن :

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{د}}{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}} \quad (\text{أ} + \text{ب} + \text{ح} \neq \text{صفر}) \quad (٣٧/٢)$$

فإذا كان  $\text{أ} + \text{ب} + \text{ح} = \text{صفر}$  ، فإن هذا الغرض لا يحقق (٣٦) ولذلك فعلنا من قبل نفترض أن الحل الخاص هو ع × و . وبالتعويض فى (٣٦) نجد أن

$$\text{د} = \text{أ} ع و + \text{ب} ع (و - ١) + \text{ح} ع (و - ٢)$$

$$\text{د} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}) ع و - (٢ + \text{ب}) ع$$

$$\therefore \text{صفر} = (٢ + \text{ب}) ع \quad \text{د} = \text{د}$$

ومن هنا



$$(٣٨٧) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{أ} + \text{ب} + \text{ح} = \text{صفر} \\ \text{ب} + ٢ + \text{ح} \neq \text{صفر} \end{array} \right\} \quad \frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢} = \text{ع} \quad \text{و} \quad \text{ع} = \text{و}$$

وأخيرا اذا كانت كل من (أ + ب + ح) = صفر ، ب + ٢ + ح = صفر  
(أى أن أ = ح) فان (٣٧) ، (٣٨) لاتصلحان . ولذلك نحاول بداهة فرضا  
جديدا هو  $\text{و} = \text{ع} + \text{و}$  . وبالتعويض نجد أن

$$(أ + ب + ح) = \text{ع} + \text{و} = ٢ - (ب + ٢ + ح) + (ب + ٤ + ح) = \text{ع} = \text{د}$$

وواضح أن ب + ٤ + ح  $\neq$  صفر لأنه لو حدث ذلك لكانت ح = صفر كما يتضح بطرح  
ب + ٢ + ح = صفر منها . وبالتالي فان ب هى الأخرى تكون صفرا . وواضح أن  
افتراض أن المعادلة من الدرجة الثانية يعنى أن ح  $\neq$  صفر . اذن لابد أن نحصل  
على حل فى هذه الحالة اذا تعذر استخدام كل من (٣٧) ، (٣٨) . ويكون  
الحل هو

$$(٣٩٧) \quad \frac{\text{ب} + \text{ح}}{٢} = \text{ع} \quad \text{حيث} \quad \text{و} = \text{ع} + \text{و}$$

ولو تصورنا أن المعادلة كانت من الدرجة ٨ فاننا نتوقع أن الحل الخاص  
يمكن أن يكون هو ع و حيث ٨ = أصغر الاعداد ( صفر ، ٢٥١ ، ٥٠٠٠٠ ، ٨ ) التى  
تعطى مقاما غير صفري فى صورة ماثلة للصور الثلاث الاخيرة .

وعلى ذلك يكون الحل العام هو

$$(٤٠٧) \quad \text{ص} = \text{ك} \frac{\text{ل}}{١} + \text{ك} \frac{\text{ل}}{٢} + \text{و} + \text{و}$$

حيث  $\text{و}$  تتحدد وفقا لاحد التعريفات (٣٧) أو (٣٨) أو (٣٩) .

٢- د = دالة زمنية : فى هذه الحالة نعالج الحل الخاص بنفس الطريقة التى  
ذكرناها فى بند (٥/٢) . وسوف نعطى فيما بعد قواعد عامة لمعالجة بعض  
الحالات الهامة .



### ٣/٣ — حالة الجذور الحقيقية المختلفة :

تختلف معادلات المرتبة الثانية عن معادلات المرتبة الاولى فى أنه من الممكن أن تكون الجذور حقيقية ومختلفة أو حقيقية ومتساوية أو تخيلية مترافقة • وذلك وفقا لمميز المعادلة المميزة • وسوف نعالج هنا الحالة الأولى التى فيها المميز موجب ، أى أن  $b^2 > 4ac$  .

وفى هذه الحالة نستطيع التمييز بين الحالات الثلاث التالية :

أ — الجذران موجبان ومختلفان :  $l_1 < l_2 < p$  صفر • ويتوقف الحل على قيمة كل من الجذرين :

١ —  $l_1 \leq l_2$  أقل من الوحدة : فى هذه الحالة يؤول كل من  $l_1$  ،  $l_2$  ،  $k$  إلى الصفر — عندما تؤول و الى ما لانهاية • أى أن الانحرافات ضو تؤول الى الصفر ويكون التوازن مستقرا •

٢ —  $l_1 = 1$  ،  $l_2 > 1$  : وهنا تؤول  $k$  إلى الصفر ، بينما  $k$  ل  $= k$  أى أن الحل العام يؤول الى صو + ك وهذه حالة التوازن المحايد •

٣ —  $l_1 < 1$  ،  $l_2 \gg 1$  : وهنا يكون الحل تباعدى ويتأثر بالجذر الأكبر أى أن ضو تؤول فى النهاية الى ك  $l_1$  وتتوقف أشارتها على اشارة ك  $l_1$

ب — الجذران سالبان ومختلفان :  $l_1 > l_2 > p$  صفر ، أى أن  $l_1$  هو الأكبر عدديا •

١ —  $l_1 \leq l_2$  : أى أن الجذران يقعان بين صفر ، ١ • وهنا تتذبذب صو حول صو بصورة تقاربية • أى أن التوازن يكون مستقرا •

٢ —  $l_1 = 1$  ،  $l_2 < 1$  : يؤول الانحراف ضو الى ك  $l_1$  = ك ( ١ - ) يؤ أى أنه يأخذ شكل دورة منتظمة سعتها = ٢ ك • أى أن صو تتغير



فى النهاية بين  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  ،  $\hat{u} - \hat{v}$  ك

٣-  $\hat{u} > \hat{v}$  ،  $\hat{u} \leq \hat{v}$  : ويكون الحل دوريا تباعديا والجزء الأكبر منه

يتحدد وفقا للجذر الأكبر عدديا أى ك  $\hat{u}$

ح- جذر موجب والاخر سالب :

١- الجذر ذو القيمة الأكبر عدديا موجبا :  $\hat{u} < \hat{v}$  صفر ،  $\hat{u} > \hat{v}$  صفر

اذن يتوقف الحل فى النهاية على قيمة  $\hat{u}$  :

اذا كانت  $\hat{u} > \hat{v}$  فان  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  تؤول الى  $\hat{u}$

اذا كانت  $\hat{u} = \hat{v}$  فان  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  تؤول الى  $\hat{u} + \hat{v}$  ك

اذا كانت  $\hat{u} < \hat{v}$  فان  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  تأخذ شكلا تباعديا

٢- الجذر الأكبر عدديا هو السالب :  $\hat{u} > \hat{v}$  صفر ،  $\hat{u} < \hat{v}$  صفر

اذا كانت  $\hat{u} < \hat{v}$  فالحل دورى تقاربى

اذا كانت  $\hat{u} = \hat{v}$  فى النهاية تتقلب  $\hat{u}$  و  $\hat{v}$  بين  $\hat{u} + \hat{v}$  ك ،  $\hat{u} - \hat{v}$  ك

اذا كانت  $\hat{u} > \hat{v}$  يكون الحل دورى تباعدي

٣- الجذران متساويان عدديا :  $\hat{u} = \hat{v}$  مقدار موجب ل

وهذا يحدث عندما تكون  $\hat{u} = \hat{v}$  ونظرا لتساوى الجذرين

فلا يمكن أن نحرف مقدما الصورة النهائية للحل ، ان أن الأمر يتوقف

على الثابتين ك ، ك . فلقيم و الزوجية يكون الحل هو  $\hat{u} = (\hat{u} + \hat{v})$  ك

، بينما لقيم والفردية يكون الحل هو  $\hat{u} = (\hat{u} - \hat{v})$  ك . وعلى ذلك فاذا

كانت قيم ك ، ك تجعل المقدارين ك ، ك ، ك - ك موجبيين



- فان ضو تتقلب بدون أن تتغير اشارتها أى أن صو لن تتقلب بصورة دورية .  
أما فى الحالة العكسية فان من الممكن أن تحدث تغيرات دورية عنيقة .

٤/٣ — حالة تساوى الجذرين :

- عندما يكون  $\beta^2 = 4$  أ ح يكون الجذران متساويين ويساويان ل مثلا .  
اذن لو سلمنا بالحل (٣٥) لكان معنى ذلك أن

$$\text{ضو} = ( \text{ك}_1 + \text{ك}_2 ) \text{ل} = \text{ك} \text{ل}$$

أى أنه يتعذر ايجاد كل من الثابتين  $\text{ك}_1$  و  $\text{ك}_2$  . وهنا نلجأ الى القاعدة التالية :

قاعدة رقم (٥) : اذا كان لمعادلة الفروق من المرتبة الثانية جذر مزدوج ل فان  $\text{ل}$  وكذلك  $\text{ول}$  يحققانها .

لنفرض أن المعادلة المميزة هى  $\text{أل}^2 + \text{ب ل} + \text{ح} = \text{صفر}$ ، حيث  $\beta^2 = 4$  أ ح  
والجذران  $\text{ل}_1$  و  $\text{ل}_2$  يساويان ل  $= \frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}$  . بينما  $\text{ح} = \frac{\beta^2}{4\text{أ}}$

$$\therefore \text{أل}^2 + \text{ب ل} + \frac{\beta^2}{4\text{أ}} = \text{صفر}$$

وبالتعويض فى معادلة الفروق بالمقدار ( ول ) نجد أن

$$\text{أول}^2 + \text{ب (ول)} + \text{ح} = \text{صفر} \quad (1)$$

$$\text{ول}^2 - \text{و (أل}^2 + \text{ب ل} + \text{ح)} = \text{صفر} \quad (2)$$

$$\text{ول}^2 - \text{و (أل}^2 + \text{ب ل} + \text{ح)} = \text{صفر} \quad (3)$$

أى أن المعادلة ( المتجانسة ) قد تحققت وهو المطلوب . ويكون الحل العام هو

(٤١/٢)

$$\text{ضو} = \text{ك}_1 \text{ل} + \text{ك}_2 \text{ول}$$



ومن الممكن تعميم هذه الحالة الى حالة وجود  $\sqrt{r}$  من الجذور المتساوية ففى معادلة من المرتبة  $N$  . ان أننا نستطيع الاستعاضة بعدد مساو من الحلول هو:

$$L^r, L^{r-1}, \dots, L^1, L^0$$

وواضح أن الحل العام فى حالة تساوى جذرين وهو

$$Z = (C_1 + C_2 W) L^r$$

يتأثر بالزمن و مرتين الاولى فى المقدار  $C_1$  و  $C_2$  والثانية فى المقدار  $L^r$  :

١- فإذا كانت  $L < 1$  فان الحل يكون تباعدا وتأثرا بالمقدار  $L^r$  الذى يتزايد بشكل أسرع من  $C_1$  و  $C_2$  فى النهاية .

٢- وإذا كانت  $L = 1$  ، فان الحل يصبح  $C_1 + C_2 W$  ، أى أن الانحراف عن التوازن يأخذ شكل اتجاه عام مستقيم .

٣- صفر  $L > 1$  : فى هذه الحالة يؤول العامل  $L^r$  الى الصفر ولكن المقدار  $C_1$  و  $C_2$  يتجه الى التزايد (عدديا) بحيث يمحض جانبا من التناقص ولو أن  $L^r$  يؤول الى الصفر بدرجة أسرع - الامر الذى يجعل  $Z$  تؤول فى النهاية الى الصفر .

ومثل هذه الحسابات يمكن بسهولة تمييزها عندما تكون  $L$  سالبة مع ملاحظة أن الحل يكون فى هذه الحالات دوريا .

مثال (١-٤/٣) : أوجد حل المعادلة :  $Z'' = 4Z - 1 = 4Z - 1$

$$\text{بمعلومية } Z = 0, Z' = 0$$

الجذران متساويان :  $L = 2$  . فيكون الحل

$$Z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$



بوضع و = صفر  $\therefore$   $\begin{matrix} ٥ \\ ١ \end{matrix} = ك$   
 $\therefore$   $\begin{matrix} ٦ \\ ١ \end{matrix} = ٢ ك + ٢ ك$  ومنها  $\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} = ٢ -$   
 $\therefore$   $\begin{matrix} ٥ \\ ١ \end{matrix} = ٢ - ٥ (٢) = ٢$

مثال (٢-٤/٣) : أوجد حل المعادلة :  $٢ ص - ١ ص - ٢ ص + ١٢$

حيث  $٥ = ص$   $٦ = ١$

المعادلة المتجانسة هي  $٢ ص - ١ ص - ٢ ص = ٠$

والمعادلة المميزة هي  $٢ ل - ١ ل + ١ = صفر$   $\therefore$  الجذران هما ١

ويكون حل المعادلة المتجانسة هو

$١ ك + ١ ك = ١$   $\therefore$   $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$  و  $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$

ولايجاد الحل الخاص نلاحظ أن  $١ + ١ + ١ = صفر$  إذن لانستطيع

افتراض أنه يساوى ثابت ع  $\therefore$  فنحاول فرضا آخر هو ع و  $\therefore$  فنجد أن هذا هو

الآخر لا يصلح لأن  $١ + ١ + ١ = ٣ \neq ١$   $\therefore$  ولذلك نحاول الحل

ع و نحسب ع  $= \frac{١٢}{١ \times ٤ + ٢} = ٦$   $\therefore$  فيكون الحل العام هو :

$١ ك + ١ ك + ١ ك = ١$   $\therefore$   $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$  و  $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$

بوضع و = صفر  $\therefore$   $\begin{matrix} ٥ \\ ١ \end{matrix} = ك$

$\therefore$   $\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} = ٢ -$   $\begin{matrix} ٦ \\ ١ \end{matrix} = ١$   $\therefore$   $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ١$

أى أن :  $١ ك + ١ ك + ١ ك = ١$   $\therefore$   $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$  و  $\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} = ك$

وهي معادلة خط اتجاه عام من الدرجة الثانية  $\therefore$



### ٥/٣- الجذور التخيلية :

إذا كان المميز سالبا أى  $\Delta < ٠$  كان الجذرين تخيليان :

$$\begin{aligned} \text{ل} &= \text{ف} + \text{ت} \text{ ق} & \text{ل} &= \text{ف} - \text{ت} \text{ ق} \end{aligned}$$

$$\text{حيث } \text{ف} = \frac{-\text{ب}}{٢} \quad , \quad \text{ق} = \frac{\sqrt{\Delta}}{٢}$$

ومن الممكن تحويل هذين الجذرين الى الصورة القطبية باستخدام م ،  $\theta$  المحسوبين وفقا للمعادلة (٢/١) ، فيصبحان :

$$\text{ل} = \text{م} ( \text{حتا } \theta + \text{ت حا } \theta ) \quad , \quad \text{ل} = \text{م} ( \text{حتا } \theta - \text{ت حا } \theta )$$

ويكون المعادلة المتجانسة هو ( بافتراض أن الثابتين هما  $\text{ح}_١$  ،  $\text{ح}_٢$  )

$$\text{ضو} = \text{ل}_١ \text{ح}_١ + \text{ل}_٢ \text{ح}_٢ = \text{م} ( \text{حتا } \theta + \text{ت حا } \theta ) \text{ح}_١ + \text{م} ( \text{حتا } \theta - \text{ت حا } \theta ) \text{ح}_٢$$

$$= \text{م} ( \text{ح}_١ \text{حتا } \theta + \text{ت حا } \theta + \text{ح}_٢ \text{حتا } \theta - \text{ت حا } \theta )$$

$$\therefore \text{ضو} = \text{م} ( \text{ك}_١ \text{حتا } \theta + \text{ك}_٢ \text{حا } \theta ) \quad (٤٧٢)$$

حيث  $\text{ك}_١ = \text{ح}_١ + \text{ح}_٢$  ،  $\text{ك}_٢ = \text{ت} ( \text{ح}_٢ - \text{ح}_١ )$  . ولابد أن تكون  $\text{ك}_١$  ،  $\text{ك}_٢$

حقيقيتين لأن ضو حقيقى . أى أن  $\text{ح}_١$  ،  $\text{ح}_٢$  كانا أصلا مقدارين مركبيين :

$$\text{ح}_١ = \frac{١}{٢} ( \text{ك}_١ - \text{ت ك}_٢ ) \quad , \quad \text{ح}_٢ = \frac{١}{٢} ( \text{ك}_١ + \text{ت ك}_٢ )$$

ومعلومية الحل الخاص  $\text{ضو}^\wedge$  ، يكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو :

$$\text{صو} = \text{ضو}^\wedge + \text{م} ( \text{ك}_١ \text{حتا } \theta + \text{ك}_٢ \text{حا } \theta ) \quad (٤٣/٢)$$

ويلاحظ أن  $\text{ضو}^\wedge$  تحسب بالطرق السابق ذكرها من قبل ، بينما يتوقف الثابتان

$\text{ك}_١$  ،  $\text{ك}_٢$  على القيم الابتدائية . أما المعلمتين م ،  $\theta$  فتتوقفان على المعامل الهيكلية أ ، ب ، ح وذلك كالآتى :







لايجاد  $\hat{u}$  ، نضع  $\hat{u} = ع$

$$٢ = \frac{٦٤}{٢٥ + ٦ + ١} = ع \therefore$$

ونوجد جذرى المعادلة المميزة :

$$٢ل + ٦ + ٢٥ = صفر$$

فلاحظ أن مميزها  $= ٣٦ - ٤ \times ١ \times ٢٥ = -٦٤$  أى أن الجذرين تخيليان .

$$٥ = \frac{٢٥}{١} = ٢٥ \therefore \quad \text{حدا } \theta = \frac{٦}{٢٥٧٢} = \frac{٣}{٥} = ٠.٦$$

ومعنى هذا أن  $\theta$  تقع فى الربع الثانى . ولذلك نحسب من الجدول  
( ١٨٠ -  $\theta$  ) باستخدام

$$\text{حدا } ( ١٨٠ - \theta ) = \text{حدا } \theta = ٠.٦$$

$$\therefore ١٨٠ - \theta = ٥٣.١ \quad \text{ومنها } \theta = ١٢٦.٩$$

ويكون الحل العام هو

$$ص = ٢ + ٥ ( ك_١ \text{ حتا } ١٢٦.٩ + ك_٢ \text{ حا } ١٢٦.٩ )$$

وبوضع  $و = صفر$

$$\therefore ٧ = ٢ + ( ك_١ \times ١ + ك_٢ \times صفر ) + ٢ = ك_١ + ٢ \quad \text{ومنها } ك_١ = ٥$$

وبوضع  $ك = ١$

$$\therefore ٢١ = ٢ + ٥ ( ٥ \text{ حتا } \theta + ك_٢ \text{ حا } \theta )$$

$$\text{حيث حا } \theta = \frac{٧ - ١}{٣٦} = ٠.١٨$$

$$\therefore ٢١ = ٢ + ٥ ( ٥ \times ٠.٦ + ك_٢ \times ٠.١٨ ) \quad \text{ومنها } ك_٢ = ٢$$



فيكون الحل العام هو

$$ص = ٥ + ٢ ( ٥ \text{ حتا } ١٢٦٩ \text{ و } ٢ - \text{ حا } ١٢٦٩ \text{ و } )$$

مثال (٢-٥/٣) : أوجد حل المعادلة  $٨ص - ٢١ص + ٢٦ص - ١٠ص - ٣ = \text{صفر}$

$$\text{بمعلومية } ص = ٩ , ص = ٤ , ص = \frac{٧}{٨}$$

$$\text{وبمعلومية أحد الجذور } ل = \frac{٥}{٨}$$

باستخدام الجذر  $\frac{٥}{٨}$  نستطيع كتابة أحد عوامل المعادلة المميزة بالشكل  $(ل - \frac{٥}{٨}) = \text{صفر}$  أي  $(٨ل - ٥) = \text{صفر}$  . وبقسمة المعادلة المميزة وهي :

$$٨ل^٣ - ٢١ل^٢ + ٢٦ل - ١٠ = \text{صفر}$$

على هذا العامل نجد أنها يمكن كتابتها كالاتى :

$$(٨ل - ٥) (ل^٢ - ٢ل + ٢) = \text{صفر}$$

وتحليل العامل الاخر  $(ل^٢ - ٢ل + ٢) = \text{صفر}$

والميز هو  $(٨ - ٤) = \text{سالب}$  . فيكون الجذران تخيليين . ولذلك نحسب

$$\frac{٢}{٢٧} = \frac{٢}{٢٧} = ٢ \text{ حتا } ٥ , \frac{١}{٢٧} = \frac{(٢ - )}{٢٧} = \theta \therefore \frac{١}{٢٧} = \theta$$

$$\therefore \text{ص} = (٢) \frac{٢}{٢} (ك \text{ حتا } \frac{١}{٢٧} + ك \text{ حا } \frac{١}{٢٧} + (ك \text{ حتا } \frac{١}{٢٧} + ك \text{ حا } \frac{١}{٢٧}) \frac{١}{٢٧} + (ك \text{ حتا } \frac{١}{٢٧} + ك \text{ حا } \frac{١}{٢٧}) \frac{١}{٢٧} + (ك \text{ حتا } \frac{١}{٢٧} + ك \text{ حا } \frac{١}{٢٧}) \frac{١}{٢٧}$$

$$\text{وبوضع } و = \text{صفر} \therefore ك + ك = ٩$$

$$\text{وبوضع } و = ١ \therefore ٤ = \frac{١}{٢٧} (ك \times \frac{١}{٢٧} + ك \times \frac{١}{٢٧} + ك \times \frac{١}{٢٧} + ك \times \frac{١}{٢٧} + ك \times \frac{١}{٢٧} + ك \times \frac{١}{٢٧})$$

$$\therefore ٣٢ = ك + ك + ك$$



$$\text{موضع و} = ٢ \therefore \frac{٧}{٨} = ٢ (ك \times \text{صفر} + ك \times ١ + ك \times \frac{٥}{٨}) \times \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore ٥٦ = ١٢٨ ك + ٢٥ ك$$

وسحل هذه المعادلات الثلاث معا نجد أن

$$\begin{aligned} ١ &= ك \\ ٢ &= ك \\ ٨ &= ك \end{aligned}$$

ومنها  $٢ = ص$  (حتا  $\frac{٢}{٤}$  و  $\frac{٢}{٤}$  حا  $\frac{٢}{٤}$ )  $+ (٨ \times \frac{٥}{٨}) \times \frac{٢}{٣}$

صورة أخرى للحل :

رأينا في الفصل الأول أن الدوال المثلثية (٣١/١) يمكن كتابتها بالصورة (٢٩/١) باستخدام العلاقات (٣٢) . وعلى ذلك يمكننا أن نكتب

$$ك = \sqrt{\frac{٢}{١} + \frac{٢}{٢}} \quad , \quad \text{ح} = \left( \frac{٢}{ك} \right)^{\frac{١}{٢}} \quad (٤٥/٢)$$

وبذلك يكون الحل هو  $ك = ك^{\frac{١}{٢}}$  (و  $\theta = \text{ح}$ ) (٤٧/٢)

مع ملاحظة إشارة ح وفقا لإشارة كل من ك ه ك فاذا كانت ك موجبة كانت ح في أحد الربعين الأول أو الثاني وإذا كانت سالبة كانت ح في الثالث أو الرابع . وفي نفس الوقت اذا كانت ك موجبة كانت ح في الربع الأول أو الرابع أما اذا كانت ك سالبة كانت ح في الثاني أو الثالث .

وفي أى صورتين نجد أن م ه ه محليتين هيكليتين . أما ك ه ك أو ك ه فتتوقف على القيم الابتدائية .

وعلى هذا فان صفات الحل الدورى تتلخص فى الآتى :



- ١- فترة الدورة تتحدد حسب  $\theta$  وتساوى  $\frac{2}{\theta}$
- ٢- المرحلة وتتحدد بواسطة  $\alpha$  لأنها تحدد قيمة  $\alpha$  عندما  $\alpha = 0$ .
- ٣- السعة متغيرة وتتحدد السعة الابتدائية وفقا للثابت  $k = \frac{2k}{1} + \frac{2k}{2}$
- ٤- معامل التقارب هو ٢

مثال (٣/٥-٣) : في المثال (٣/٥-١) يمكن تحويل الحل الى الصورة (٤٦)  
 $k = \frac{257}{4+257} = 539$  ونظروا لأن  $k$  موجبة ،  $k$  سالبة فان  $\alpha$  تقع فى  
 الربع الرابع ويكون  $\alpha = \frac{2}{5} = -0.4$  ومنها  $\alpha = -218$  أى أن الحل  
 $\alpha = 2 + 5 (5 \text{ حتا } 218 \text{ او } -2 \text{ حتا } 218)$

يتحول الى

$$\alpha = 2 + 539 \times (5) \text{ حتا } (218 + 218)$$

وتتلخص صفات الدورة فى الآتى :

- ١- الفترة هى  $\frac{360}{1269} = 284$  وحدة زمنية
- ٢- السعة الابتدائية هى  $k = 539$
- ٣- معامل التقارب هو  $\alpha = 5$  وهو أكبر من الوحدة أى أن الدورة تباعدية .
- ٤- المرحلة وتتحدد بقيمة الدالة عند نقطة الصفر وهى  $\alpha = 2 + 539 \text{ حتا } (-\alpha)$

$$\alpha = 2 + 539 \text{ حتا } 218 = 2$$

أو تتحدد بموقع أول قمة وهى عندما  $1269 + 218 = 360$  أى و

$$\frac{360 - 218}{1269} \text{ أى عند } \alpha = 284$$

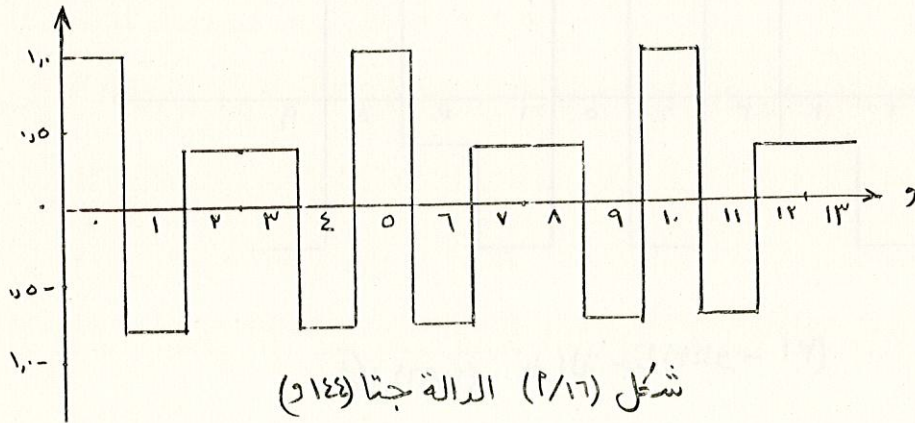


## عدم انتظام الدورة :

نلاحظ أن منحنى الدالة هنا ( و - ح ) لا يلزم أن يكون منتظما بالضبط لكل فترة دورة ، وذلك لأن الفترة لا يلزم أن تكون عددا صحيحا ، بينما أن الزمن يقاس في معادلات الفروق لقيم و الصحيحة فقط . ولذلك فإن الانتظام لا يظهر الا عند أصغر مضاعف للدورة يكون عددا صحيحا . مثلا اذا كانت  $\theta = 144$  فإن طول الدورة يكون ٢٥ . ولذلك لا يظهر الانتظام الا كل خمس وحدات . ولنفرض أن  $\theta = ١٤٤$  . إذن تكون قيمة الدالة كالآتي :

| و         | صفر     | ١       | ٢       | ٣       | ٤       | ٥       | ٦       | ٧       | ... |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| حتا و     | حتا صفر | حتا ١٤٤ | حتا ٢٨٨ | حتا ٢٢٢ | حتا ٢١٦ | حتا ٣٦٠ | حتا ١٤٤ | حتا ٢٨٨ | ... |
| حتا ١٤٤ و | ١٠٠٠ -  | ٨٠٩ -   | ٣٠٩ -   | ٣٠٩ -   | ٨٠٩ -   | ١٠٠٠ -  | ٨٠٩ -   | ٣٠٩ -   | ... |

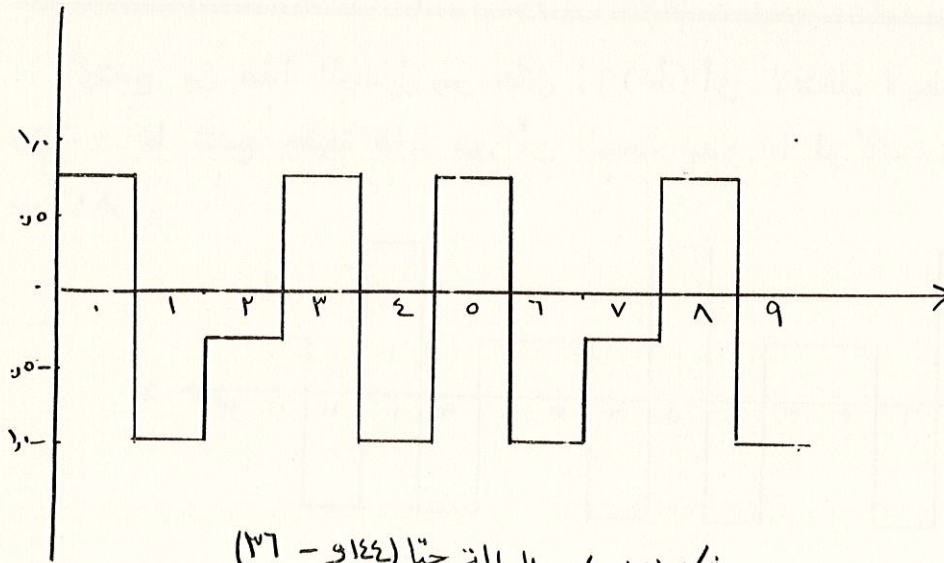
ويتضح من هذا الجدول ومن شكل (٢/١٦) أن الانتظام لا يظهر الا كل ٥ وحدات زمئية . كما تتضح حقيقة هامة هي أن السعة تبدو كما لو كانت تقع بين  $+ ١٠٠٠$  و  $- ٨٠٩$  .





ومن جهة أخرى فان دخول ح يغير من الصورة . لنفرض أولاً أن ح = ٣٦ .  
 في هذه الحالة تكون الدورة طولها ٢٥ وحدة وتنظم كل خمس وحدات ، ولكن  
 يتغير شكلها لأن ح تنقلها بمقدار  $\frac{36}{144} = \frac{1}{4}$  وحدة زمن ، ولكن عدم ظهور  
 كسور في الزمن يغير المجرى الزمني شكلاً وموضعاً كما يظهر من شكل ( ١٦ ب )  
 ومن الجدول الآتي :

| و                   | صفر      | ١        | ٢        | ٣        | ٤        | ٥        | ٦        | ٠٠٠ |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| ح تا ( و - ح )      | ح تا ٣٦  | ح تا ١٨  | ح تا ٢٥٢ | ح تا ٣٦  | ح تا ١٨٠ | ح تا ٣٢٤ | ح تا ١٠٨ | ٠٠٠ |
| ح تا ( ١٤٤ و - ٣٦ ) | ٠٨٠٩ - ٠ | ٠٩٩٠ - ٠ | ٠٣٠٩ - ٠ | ٠٨٠٩ - ٠ | ٠٠٠٠ - ١ | ٠٨٠٩ - ٠ | ٠٩٩٠ - ٠ | ٠٠٠ |



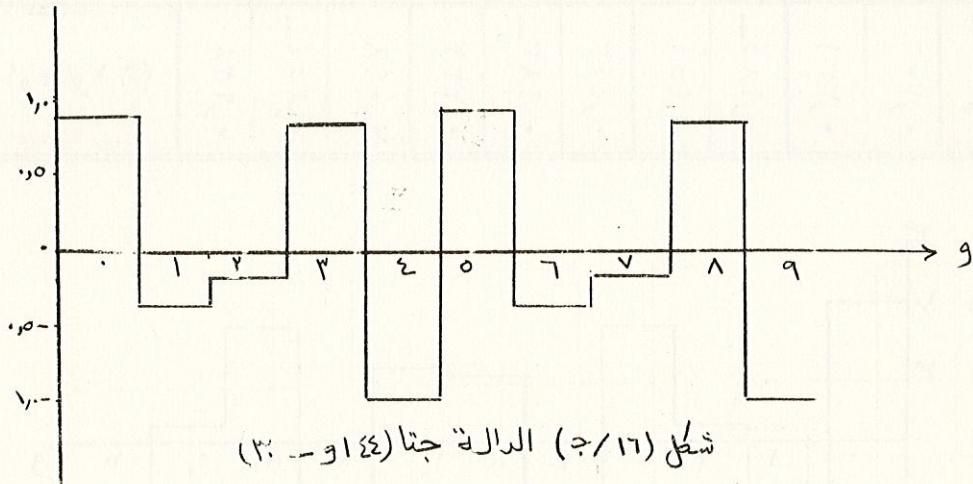
شكل ( ١٦ ب ) - الدالة جتا ( ١٤٤ و - ٣٦ )



وأخيرا فان تغير ح. يؤدي الى أحداث تغيرات أخرى مماثلة . فلو فرض أن  
ح = ٣٠ فان الدالة حتا ( ١٤٤ أو ٢٠ ) تأخذ القيم التالية :

| و                | صفر    | ١       | ٢       | ٣      | ٤       | ٥      | ٦       | ٧       | .... |
|------------------|--------|---------|---------|--------|---------|--------|---------|---------|------|
| حتا (و - ح)      | حتا ٣٠ | حتا ١١٤ | حتا ٢٥٨ | حتا ٤٢ | حتا ١٨٦ | حتا ٣٠ | حتا ١١٤ | حتا ٢٥٨ | .... |
| حتا (١٤٤ و - ٣٠) | ٠.٨٦٦  | ٠.٤٠٧   | ٠.٢٢٨   | ٠.٧٤٣  | ٠.٩٩٥   | ٠.٨٦٦  | ٠.٤٠٧   | ٠.٢٢٨   | .... |

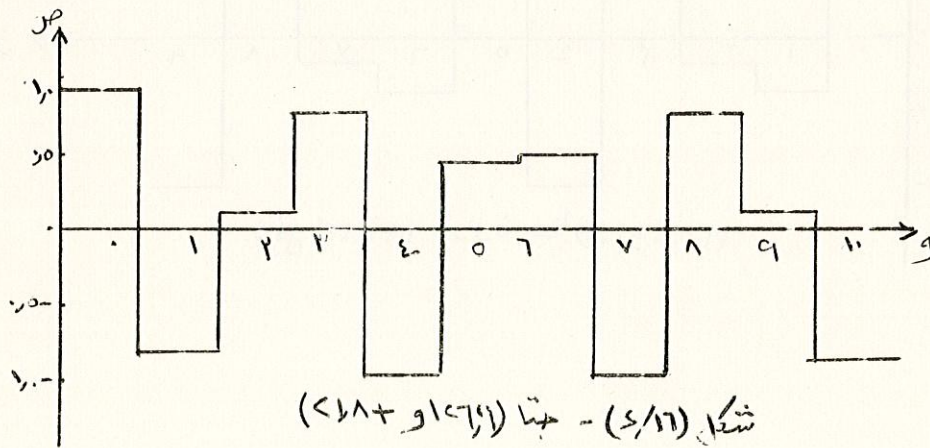
ونلاحظ في هذه الحالة أن السعة تقع بين ٠.٨٦٦ و ٠.٩٩٥ أى أنها لاتصل  
١ + أو ١ -





ونلاحظ بمقارنة هذه الحالة بالحالة السابقة التي تختلف عنها بستة درجات فقط أن الشكل قريب نوعا ما في الحالتين ولكن القيم تختلف بصورة واضحة .  
وأخيرا فانه في الحالات التي يكون أصغر مضاعف صحيح لطول الدورة كبيراً فان الدورة تبدو بصورة أقل انتظاماً من حيث القيم ومثال ذلك الدالة :  
حتا ( ٢٦٩ او + ٢١٨ ) التي ظهرت في المثال ( ٣/٥-٣ ) ، كما يتضح من الجدول التالي ومن شكل ( ١٦/د ) :

| و                    | صفر  | ١    | ٢    | ٣    | ٤    | ٥    | ٦    | ٧    | ٨    | ٩    | ١٠   | .... |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ( و ٥ - ح )          | ٢١٨  | ٨٧٣١ | ٦٥٨٨ | ٤٢٥  | ٣٦٦١ | ٢٩٦٨ | ٢٣٦١ | ١٩٥١ | ٢١٧٠ | ٨٣٩  | ٢٠١١ | .... |
| حتا ( ٢٦٩ او + ٢١٨ ) | ٧٢٨٠ | ٣٥٧٠ | ٧٦٠٠ | ٨٨٨٠ | ١٧٩٠ | ٢٤٣٠ | ١٥٣٠ | ٩٨٥٠ | ١٨٧٠ | ٦٠١٠ | ٦٥٧٠ | .... |





وواضح من هذا الرسم أن الدورة تبدو للعشرة وحدات الأولى بحيث تكون قيمتها موجبة لوحدين متتالية ثم سالبة في الثالثة ولكن الصورة تتغير ابتداءً من الوحدة الحادية عشر حيث تكون موجبة مرة ثم سالبة مرتين • وبجانب هذا فإن القيم لا تبدو متماثلة من دورة لأخرى لأن طول الدورة ليس ٣ وحدات زمنية وإنما ٢٨٤ كما ذكرنا من قبل •

وعلى ذلك فإنه بالرغم من انتظام الدورة بالنسبة للدالة الأصلية التي تفترض أن "و" متغير متصل فإن عدم الانتظام يمكن أن يظهر عند تطبيق هذه الدالة بافتراض و متغير منفصل الدورات الفعلية مما يدعو البعض إلى رفض تشييد الدورات الفعلية بمثل هذه الدالة المنتظمة •

~~~~~


٤ - المعادلات من المرتبة n

١/٤ - الحل الخاص

المعادلة الخطية من المرتبة n بمعاملات ثابتة هي :

$$A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0 \quad (47/2)$$

أي
$$A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0$$

أو
$$A_n \cdot x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0$$

حيث x هي عامل الأبطال . ويمكن الحصول على الحل الخاص وحساب الانحرافات عنه :

$$x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0 \quad (48/2)$$

حيث x هي أصغر الأعداد (صفر ، ١ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠) التي تجعل الدوال الآتية في المعادلات $\neq$ صفر

$$x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0 \quad (49/2)$$

أي
$$x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0 = 0$$

والطرف الأيمن هو :
$$[x^n + A_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + A_1 \cdot x + A_0] = 0$$

ونظراً لأن x تتغير بين صفر ، ١ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ المقادير (x) و $x = 0$ لا تساوي

الصفر فإن الشرط السابق يعني أن المقدار بين قوسين مربعين لا يساوي الصفر .

٢/٤ - الحل العام :

باستخدام الانحرافات عن الحل الخاص تتحول المعادلة (٤٧) الى الصورة المتجانسة

$$\begin{aligned} \text{أ.ض.} + \text{أ.ض.} + \text{أ.ض.} + \dots + \text{أ.ض.} + \text{أ.ض.} &= \text{صفر} \\ \text{أى} \quad \left(\sum_{i=1}^N \text{أ.ض.}_i \right) &= \text{صفر} \end{aligned} \quad (٥٢/٢)$$

وتكون المعادلة المميزة هي

$$\text{صفر} = \sum_{i=1}^N \text{أ.ض.}_i \quad (٥٣/٢)$$

وهذه المعادلة لها ن جذور بعضها حقيقي وعدده ح $\geq$ ن والباقي يكون خ من أزواج الجذور التخيلية المترافقة ومعنى هذا أن ن = ح + ٢ خ . وهذا يكون الحل العام للانحرافات هو

$$\text{ض.و} = \sum_{i=1}^N \text{ك.ل.} \quad (٥٤/٢)$$

ومنها يكون الحل العام هو :

$$\text{ص.و} = \sum_{i=1}^N \text{ك.ل.} + \text{ص.و.}$$

ويتوقف المسار الزمني للانحرافات على الجذر الطاغى أى ذى أكبر قيمة .
فإذا كان $|ل|$ هو الأكبر فان الحل يكون تباعدى إذا كان $|ل| < ١$ ويتوقف
مسار ض على المقدار ك ل ، الذى يكون غير دورى اذا كان ل موجبا ،
ودورى اذا كان سالبا . أما بالنسبة للجذور المركبة فان الحد الطاغى هو زوج
الجذور الذى قيمته المطلقة م أكبر ما يمكن فاذا كانت م أكبر من الوحدة كان الحل
الدورى تباعديا ، والعكس بالعكس .

وبالرغم من أن نتائج الحالة النونية تعتبر تعميما مباشرا لحالتى ن = ١ ،
ن = ٢ ، فان ارتفاع الدرجة عن ٢ يجعل من المتعذر ايجاد الجذور بالطرق

الجبرية ولا بد من الالتجاء الى الوسائل الحسابية المعروفة لايجاد القيم العددية لل جذور . ولكن نلاحظ أنه اذا كان :

$$\left(\begin{array}{c} ١ \\ ١ \\ ٢ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} \right) = \text{صفر}$$

فان أحد الجذور يساوى الوحدة وبذلك يكون الحد المناظر خلوا من و (أى حد مطلق) ومن القسم السابق نجد أن الحل الخاص يأخذ الشكل ع و . أى أن الحل العام يحتوى على دالة خطية فى الزمن (ب + ع) وبالمثل اذا كانت :

$$\left(\begin{array}{c} ١ \\ ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} \right) = \text{صفر}$$

كان الجذر ل = ١ متكررا مرتين . ولذلك فان كل من ١ ، و ويكونان جذريين فاذا أضفنا الى ذلك أن الحل الخاص هو ع و فى هذه الحالة فان الحل النهائى يحتوى على معادلة من الدرجة الثانية فى و : (ب + ب و + ع و) حيث الثابتين ب ، ب يحسبان من القيم الابتدائية بينما ع تحسب من (٥١) .

وعلى العموم عندما تتوفر الشروط التى تجعل الحل الخاص من الدرجة ه فى و فان الجذر ١ يظهر ه من المرات ويحتوى الحل العام على معادلة من الدرجة ه فى الزمن . بالشكل

$$\left(\begin{array}{c} ١ \\ ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} \right) = \text{صفر}$$

أما بقية الجذور فتختلف عن الوحدة و يكون عددها (ن - ه) وتأخذ الشكل المعتاد .

ومن جهة أخرى فانه اذا كان

$$\left(\begin{array}{c} ١ \\ ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} + \begin{array}{c} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{array} \right) = \text{صفر}$$

فان أحد الجذور = ١ - ه ويحتوى الحل العام على مقدار ثابت تتغير اشارته بصورة تبادلية بالمثل اذا كانت المقادير :

$$-1 + 1^2(2) + 1^3(3) + \dots + 1^n(n) = 0$$
 لجميع قيم $n = 1, 2, 3, \dots$ فان الجذر (-1) يكون متكررا $(1 + 2)$ من المرات .

٣/٤ — استخدام عوامل التحويل لايجاد الحل الخاص :

عرفنا في البند (٢/١) عوامل التحويل h, l, e, p ورأينا أن هذه العوامل يمكن معالجتها بنفس طرق معالجة المقادير الجبرية العادية من حيث الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع الى أسس . وسوف نضيف هنا بعض القواعد التي تسهل ايجاد الحل الخاص لأشكال معينة للدالة $d(w)$. ونلاحظ أولا أن معادلة الفروق يمكن كتابتها بالصورة :

$$h(p) \cdot d(w) = m \cdot p^v$$
 حيث $h(p)$ كثيرة حدود من الدرجة n في p . فاذا عوضنا عن w بالحل الخاص w^h فان

$$h(p) \cdot d(w^h) = m \cdot p^v \quad (57/2)$$

هذه الصورة الرمزية للحل الخاص تقتضى منا أن نعرف عمليات ضرب دالة مثل $d(w)$ في دالة رمزية مثل $h(p)$ أو قسمتها عليها .

لنفرض أن لدينا دالة $f(p)$ في المحول p هي عبارة عن كثيرة حدود $h(p)$ في p أو النسبة بين كثيرتي حدود $f(p) = \frac{h(p)}{g(p)}$. في هذه الحالة يمكن أن نكتب $\frac{1}{g(p)}$ في شكل متسلسلة لانهاية في p تضرب في $h(p)$ وهذا تكون $f(p)$ نفسها متسلسلة لانهاية في p . فاذا كانت

$$\begin{aligned}
 h(p) &= (b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n) \\
 &= \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \dots
 \end{aligned}$$

وبالضرب نجد أن :

ف (ط) = (ط) × $\frac{1}{(ط)^2}$ = 1 + $\frac{1}{ط} + \frac{1}{ط^2} + \dots$ الى ∞ (٥٧٢)

ومن الممكن جعل F (ط) محدودة بأخذ قيمة افتراضية للمقدار τ أقل من الوحدة . ويلاحظ أن المعاملات $A_1, A_2, \dots, A_n$ دوال في المعاملات $B_1, B_2, \dots, B_n$ فإذا عوضنا عن τ في الدالة F بمقدار جبري مثل m فإن :

(514) $\frac{(r)1\mathbb{Z}}{(r)2\mathbb{Z}} = \dots\dots\dots + \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{p} \cdot 1 + \dots = (p) \text{ ف}$

ومن الممكن أيضا أن نستغل العلاقة (٦) بين ط ه ه لتحويل ف (ط) الى دالة أخرى ق (ه) بالتعويض في (٥٨) بالمقدار (١-ه) عن ط بعد تحويل ح ه ح الى كثيرتي حدود في ه :

(٥٩/٢) $\dots + \Delta'_1 + \Delta'_1 + \Delta'_1 = \frac{\Delta'_1 \Delta'_2 \Delta'_3}{\Delta'_1 \Delta'_2 \Delta'_3} = \text{ف (ط)}$

مثال (٤/٣-١) : لنفرض أن $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ، $\tau_1 = 1$ ، $\tau_2 = 2$ ، $\tau_3 = 3$ ، $\tau_4 = 4$ ، $\tau_5 = 5$ ، $\tau_6 = 6$ ، $\tau_7 = 7$ ، $\tau_8 = 8$ ، $\tau_9 = 9$ ، $\tau_{10} = 10$ ، $\tau_{11} = 11$ ، $\tau_{12} = 12$ ، $\tau_{13} = 13$ ، $\tau_{14} = 14$ ، $\tau_{15} = 15$ ، $\tau_{16} = 16$ ، $\tau_{17} = 17$ ، $\tau_{18} = 18$ ، $\tau_{19} = 19$ ، $\tau_{20} = 20$ ، $\tau_{21} = 21$ ، $\tau_{22} = 22$ ، $\tau_{23} = 23$ ، $\tau_{24} = 24$ ، $\tau_{25} = 25$ ، $\tau_{26} = 26$ ، $\tau_{27} = 27$ ، $\tau_{28} = 28$ ، $\tau_{29} = 29$ ، $\tau_{30} = 30$ ، $\tau_{31} = 31$ ، $\tau_{32} = 32$ ، $\tau_{33} = 33$ ، $\tau_{34} = 34$ ، $\tau_{35} = 35$ ، $\tau_{36} = 36$ ، $\tau_{37} = 37$ ، $\tau_{38} = 38$ ، $\tau_{39} = 39$ ، $\tau_{40} = 40$ ، $\tau_{41} = 41$ ، $\tau_{42} = 42$ ، $\tau_{43} = 43$ ، $\tau_{44} = 44$ ، $\tau_{45} = 45$ ، $\tau_{46} = 46$ ، $\tau_{47} = 47$ ، $\tau_{48} = 48$ ، $\tau_{49} = 49$ ، $\tau_{50} = 50$ ، $\tau_{51} = 51$ ، $\tau_{52} = 52$ ، $\tau_{53} = 53$ ، $\tau_{54} = 54$ ، $\tau_{55} = 55$ ، $\tau_{56} = 56$ ، $\tau_{57} = 57$ ، $\tau_{58} = 58$ ، $\tau_{59} = 59$ ، $\tau_{60} = 60$ ، $\tau_{61} = 61$ ، $\tau_{62} = 62$ ، $\tau_{63} = 63$ ، $\tau_{64} = 64$ ، $\tau_{65} = 65$ ، $\tau_{66} = 66$ ، $\tau_{67} = 67$ ، $\tau_{68} = 68$ ، $\tau_{69} = 69$ ، $\tau_{70} = 70$ ، $\tau_{71} = 71$ ، $\tau_{72} = 72$ ، $\tau_{73} = 73$ ، $\tau_{74} = 74$ ، $\tau_{75} = 75$ ، $\tau_{76} = 76$ ، $\tau_{77} = 77$ ، $\tau_{78} = 78$ ، $\tau_{79} = 79$ ، $\tau_{80} = 80$ ، $\tau_{81} = 81$ ، $\tau_{82} = 82$ ، $\tau_{83} = 83$ ، $\tau_{84} = 84$ ، $\tau_{85} = 85$ ، $\tau_{86} = 86$ ، $\tau_{87} = 87$ ، $\tau_{88} = 88$ ، $\tau_{89} = 89$ ، $\tau_{90} = 90$ ، $\tau_{91} = 91$ ، $\tau_{92} = 92$ ، $\tau_{93} = 93$ ، $\tau_{94} = 94$ ، $\tau_{95} = 95$ ، $\tau_{96} = 96$ ، $\tau_{97} = 97$ ، $\tau_{98} = 98$ ، $\tau_{99} = 99$ ، $\tau_{100} = 100$ ، $\tau_{101} = 101$ ، $\tau_{102} = 102$ ، $\tau_{103} = 103$ ، $\tau_{104} = 104$ ، $\tau_{105} = 105$ ، $\tau_{106} = 106$ ، $\tau_{107} = 107$ ، $\tau_{108} = 108$ ، $\tau_{109} = 109$ ، $\tau_{110} = 110$ ، $\tau_{111} = 111$ ، $\tau_{112} = 112$ ، $\tau_{113} = 113$ ، $\tau_{114} = 114$ ، $\tau_{115} = 115$ ، $\tau_{116} = 116$ ، $\tau_{117} = 117$ ، $\tau_{118} = 118$ ، $\tau_{119} = 119$ ، $\tau_{120} = 120$ ، $\tau_{121} = 121$ ، $\tau_{122} = 122$ ، $\tau_{123} = 123$ ، $\tau_{124} = 124$ ، $\tau_{125} = 125$ ، $\tau_{126} = 126$ ، $\tau_{127} = 127$ ، $\tau_{128} = 128$ ، $\tau_{129} = 129$ ، $\tau_{130} = 130$ ، $\tau_{131} = 131$ ، $\tau_{132} = 132$ ، $\tau_{133} = 133$ ، $\tau_{134} = 134$ ، $\tau_{135} = 135$ ، $\tau_{136} = 136$ ، $\tau_{137} = 137$ ، $\tau_{138} = 138$ ، $\tau_{139} = 139$ ، $\tau_{140} = 140$ ، $\tau_{141} = 141$ ، $\tau_{142} = 142$ ، $\tau_{143} = 143$ ، $\tau_{144} = 144$ ، $\tau_{145} = 145$ ، $\tau_{146} = 146$ ، $\tau_{147} = 147$ ، $\tau_{148} = 148$ ، $\tau_{149} = 149$ ، $\tau_{150} = 150$ ، $\tau_{151} = 151$ ، $\tau_{152} = 152$ ، $\tau_{153} = 153$ ، $\tau_{154} = 154$ ، $\tau_{155} = 155$ ، $\tau_{156} = 156$ ، $\tau_{157} = 157$ ، $\tau_{158} = 158$ ، $\tau_{159} = 159$ ، $\tau_{160} = 160$ ، $\tau_{161} = 161$ ، $\tau_{162} = 162$ ، $\tau_{163} = 163$ ، $\tau_{164} = 164$ ، $\tau_{165} = 165$ ، $\tau_{166} = 166$ ، $\tau_{167} = 167$ ، $\tau_{168} = 168$ ، $\tau_{169} = 169$ ، $\tau_{170} = 170$ ، $\tau_{171} = 171$ ، $\tau_{172} = 172$ ، $\tau_{173} = 173$ ، $\tau_{174} = 174$ ، $\tau_{175} = 175$ ، $\tau_{176} = 176$ ، $\tau_{177} = 177$ ، $\tau_{178} = 178$ ، $\tau_{179} = 179$ ، $\tau_{180} = 180$ ، $\tau_{181} = 181$ ، $\tau_{182} = 182$ ، $\tau_{183} = 183$ ، $\tau_{184} = 184$ ، $\tau_{185} = 185$ ، $\tau_{186} = 186$ ، $\tau_{187} = 187$ ، $\tau_{188} = 188$ ، $\tau_{189} = 189$ ، $\tau_{190} = 190$ ، $\tau_{191} = 191$ ، $\tau_{192} = 192$ ، $\tau_{193} = 193$ ، $\tau_{194} = 194$ ، $\tau_{195} = 195$ ، $\tau_{196} = 196$ ، $\tau_{197} = 197$ ، $\tau_{198} = 198$ ، $\tau_{199} = 199$ ، $\tau_{200} = 200$ ، $\tau_{201} = 201$ ، $\tau_{202} = 202$ ، $\tau_{203} = 203$ ، $\tau_{204} = 204$ ، $\tau_{205} = 205$ ، $\tau_{206} = 206$ ، $\tau_{207} = 207$ ، $\tau_{208} = 208$ ، $\tau_{209} = 209$ ، $\tau_{210} = 210$ ، $\tau_{211} = 211$ ، $\tau_{212} = 212$ ، $\tau_{213} = 213$ ، $\tau_{214} = 214$ ، $\tau_{215} = 215$ ، $\tau_{216} = 216$ ، $\tau_{217} = 217$ ، $\tau_{218} = 218$ ، $\tau_{219} = 219$ ، $\tau_{220} = 220$ ، $\tau_{221} = 221$ ، $\tau_{222} = 222$ ، $\tau_{223} = 223$ ، $\tau_{224} = 224$ ، $\tau_{225} = 225$ ، $\tau_{226} = 226$ ، $\tau_{227} = 227$ ، $\tau_{228} = 228$ ، $\tau_{229} = 229$ ، $\tau_{230} = 230$ ، $\tau_{231} = 231$ ، $\tau_{232} = 232$ ، $\tau_{233} = 233$ ، $\tau_{234} = 234$ ، $\tau_{235} = 235$ ، $\tau_{236} = 236$ ، $\tau_{237} = 237$ ، $\tau_{238} = 238$ ،

$$\therefore \frac{1}{x} = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

$$(\dots + b_4 + b_3 + 1)(b_2 - b + 2) = \frac{b_2 - b + 2}{b_2 - 1} = \frac{1}{b} = (b) \text{ وضوحاً فـ}$$

$$v(bz) = \sum_{c=0}^{\infty} z + bz + z =$$

فانما عوضنا عن طيد لالة هـ

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$$(\nabla(\Delta \gamma))_{\substack{\infty \\ \substack{\infty \\ \infty}}} \gamma + \Delta 0 + 1) \dots$$

وعلى هذا فاننا نستطيع أن نعتبر ف متسلسلة بقوى تصاعدية في ط ٠ وبالمثل فان ق هي الأخرى متسلسلة بقوى تصاعدية في ط ٠ وسنعالج الآن بعض صور حاصل الضرب ف (ط) × د (و) :

$$١- د (و) = م^و \text{ حيث } م \text{ ثابت} \\ (٦٠/٢) \quad ف (ط) م^و = ف (١-م) م^و$$

أى أننا نكتب ف بدلالة $\frac{1}{م}$ عوضاً عن ط ٠ لاثبات ذلك نلاحظ أن ط^٧ تعنى ابطاء الزمن و بمقدار $\sqrt{م}$ وحدات زمنية ٠

$$\begin{aligned} \therefore ف (ط) م^و &= (أ. + أ_١ ط + أ_٢ ط^٢ + \dots) م^و \\ &= أ. م^و + أ_١ م^{و-١} + أ_٢ م^{و-٢} + \dots \\ &= (أ. + أ_١ م^{-١} + أ_٢ م^{-٢} + \dots) م^و \\ &= ف (١-م) م^و \end{aligned}$$

بالمثل اذا كانت د (و) = ح م^و حيث ح هي الأخرى ثابت

$$\therefore ف (ط) ح م^و = ح م^و ف (١-م) \quad (٦٠/٢)$$

$$٢- د (و) = س م^و \text{ حيث } س \text{ متغير بينما } م \text{ ثابت}$$

$$(٦١/٢) \quad ف (ط) س م^و = م^و ف \left(\frac{ط}{م} \right) س و$$

وعلى هذا فان الطرف الأيسر مايزال يحتوى على ط ولذا يعنى ادخال فترات ابطاء على المتغير س و بينما م^و تكون عاملاً مشتركاً ، ولذلك كتبناها سابقاً على ف التى يستعاض فيها بخارج القسمة $\frac{ط}{م}$ عن ط ٠ ولاثبات ذلك نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
 \text{ف (ط) س و م}^2 &= (أ. + أ_1 ط + أ_2 ط^2 + \dots + ٠٠٠٠٠) \text{ س و م}^2 \\
 &= أ. س و م^2 + أ_1 س و م^1 + أ_2 س و م^2 + \dots + ٠٠٠٠٠ \\
 &= \text{م}^2 (أ. س و + أ_1 س و م^1 + أ_2 س و م^2 + \dots + ٠٠٠٠٠) \\
 &= \text{م}^2 (أ. + أ_1 ط + أ_2 ط^2 + \dots + ٠٠٠٠٠) \text{ س و} \\
 &= \text{م}^2 \times \text{ف (ط) س و}
 \end{aligned}$$

٣- د (و) = وه : حيث ه ثابت صحيح . أى أن د (و) دالة من الدرجة
ه فى و ومن المعلوم أن الفرق رقم ه لمثل هذه الدالة يكون مقدار ثابت
أى أن الفرق رقم (ه + ١) والفرق التى من درجات أعلى كلها أصفار . لذلك
فمن الأفضل تحويل ف (ط) الى ق (ط) أى الى كثيرة حدود فى ط بحيث
نكتفى منها بالحدود التى فيها أس ط يساوى أو يقل عن ه .

$$\text{ف (ط) وه} = \text{ق (ط) وه} = ب_0 + ب_1 و + ٠٠٠٠٠ + ب_ه وه \quad (٦٧٢)$$

ومن الممكن تعميم هذه القاعدة بسهولة الى الحالة التى فيها د (و) = $\frac{ه}{ر}$ وه

٤- اذا كانت ف (ط) = $\frac{١}{ح (ط)}$ فان من السهل تحويل العلاقات السابقة بدلالة ح :

$$\text{م}^2 \frac{١}{ح (ط)} = \frac{١}{ح (ط)} \text{ م}^2 \quad (٦٠/٢)$$

$$\frac{١}{ح (ط)} \text{ س و م}^2 = \text{م}^2 \times \frac{١}{ح (ط)} \text{ س و} \quad (٦١/٢)$$

$$\frac{١}{ح (ط)} \text{ وه} = \text{ق (ط) وه} \quad (٦٧٢)$$

وفى هذه الحالة الأخيرة نحول ح (ط) الى كثيرة حدود فى ط ثم نوجد

$$[\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})] 3 =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} =$$

مثال (٣-٣/٤) : أوجد الحل الخاص للمعادلة : $ص_و + أ_ص_و + ب_ص_و = ح_و$

$$ح (ط) = (١ + أ + ب) ط$$

$$\therefore ح (\frac{1}{ط}) = (١ + أ + ب) \times \frac{1}{ط} = \frac{1}{ط} (١ + أ + ب)$$

ويكون الحل الخاص هو

$$\frac{ح_و + ٢}{١ + أ + ب} = \frac{ح_و}{(\frac{1}{ط}) ح} = \frac{ح_و}{ح (ط)} = \frac{١}{ص_و}$$

ويمكن التأكد من صحة هذا الحل بالتعويض في الطرف الأيمن من المعادلة الأصلية فنحصل على

$$ح_و = (١ + أ + ب) \frac{1}{ص_و}$$

مثال (٤-٣/٤) : أوجد الحل الخاص للمعادلة :

$$١٠ ص_و - ١٨ ص_و + ١٣ ص_و - ٤ ص_و = ٥ + ١٠ + ٢$$

$$\therefore \frac{٥ + ١٠ + ٢}{٣٤٤ + ١٤٤ + ١} = \frac{٥ + ١٠ + ٢}{٣٤٤ - ١٣٣ + ١٨ - ١٠} = \frac{١٧}{١٠} = \frac{١}{ص_و}$$

$$= \frac{١٧}{١٠} = \frac{١}{ص_و}$$

$$٥ + (٤٠ - ١٠) + (٣٠ + ٤ + ٨ - ٢) =$$

$$١٧ = ١٠ ص_و + ٢ =$$

ومن الممكن الحصول على هذه النتيجة بافتراض أن هذا الحل هو $ص_و =$

أ + ب + ح و ثم التعويض في الطرف الأيمن لمعادلة الفروق ثم مساواة

المعاملات المتساوية فنحصل على ثلاثة معادلات في أ ، ب ، ح نحلها كما

فعلنا في بند (٥/٢) .

ملحوظة : من الممكن أن نصوغ العلاقات السابقة بدلالة المحول ل الخاص بالتعجيل
لأنه اذا كانت ح (ط) من الدرجة ن فانه من الممكن كتابتها بدلالة ل كالآتي :

$$(74/2) \quad \frac{(J)'_c}{N_J} = \frac{r^{-N} \prod_{j=1}^N A_{r,j}}{N_J} = r^{-N} \prod_{j=1}^N A_{r,j} = r^N \prod_{j=1}^N A_{r,j} = (p)_c$$

(70/2) (9) $\frac{J}{(J)'\tau} = \frac{(9)}{(16)\tau} = \frac{1}{16} \therefore$

وحيث أن ط = ل - ١ :

$$(172) \quad \frac{N_{+f}}{(f)'_T} = f \left(\frac{J}{(J)'_T} \right) \therefore$$

وبالمثل بالنسبة لباقي العلاقات

م . سعيد